

Examen Hogere Wiskunde Juni 2022

Meerkeuzevraag 1

Hoeveel oplossingen z (Complex getal) zijn er die voldoen aan $|z - 2| = 2$ en $|z - 2 - 2i| = 2$ en $|\operatorname{re}(z) + i| < \sqrt{5}$, hierbij is " $\operatorname{re}(z)$ " het reële deel van z

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) Oneindig veel

Antwoord ?

B

Meerkeuzevraag 2

Voor welke waarden van α bereikt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x,y) \rightarrow (xy)^{(\alpha/2)} - 3\alpha/2 \cdot (x + y - 10) + 100$ een lokaal maximum ?

- A) α tussen 0 en 1
- B) α tussen 1 en 2
- C) α tussen 0 en 2
- D) Voor geen enkele waarde van α

Antwoord ?

A

Meerkeuzevraag 3

Als je een matrix A hebt die voldoet aan de voorwaarden van een gesloten Leontief model en weet dat A^t de getransponeerde matrix hiervan is, welke van deze uitspraken is dan niet waar

Antwoord ?

B) De getransponeerde matrix A^t voldoet ook aan de voorwaarden van een gesloten Leontief model

Meerkeuzevraag 4

Het voorschrift $f(x,y) = ax^2 + \ln(bxy) + cy^2$ heeft als eerste orde benadering van f in $(\frac{1}{2}, ?)$ de functie $g(x,y) = 6x + (5/4)y + 4 - \ln(3)$ en $f(4,2)$ ligt op de niveaulijn met hoogte 64,5

Antwoord ?

C) $f(x,y) = 4x^2 + \ln(xy/8) +$

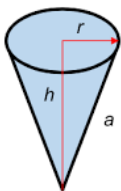
Open vraag 1

Bewijs dat voor alle n ($0, 1, 2, 3, \dots, n$) geldt dat $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ deelbaar is door 7

=> volledige inductie

Open vraag 2

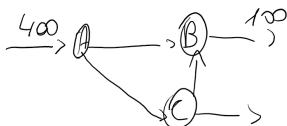
Beschouw een omgekeerd biervat in de vorm van een kegel, dit wordt aangevuld met bier aan een constante snelheid van $1/2500$ kubieke meter per minuut, het volume van een kegel wordt gegeven door $V = \pi \cdot r^2 \cdot h/3$, waarbij r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de kegel



- Als de hoogte van het bier in het vat 0,2 m bedraagt, hoe snel verandert de hoogte dan
- Er is ook een lek aan de onderkant van de kegel, hierdoor stroomt er $h^3/100$ kubieke meter per minuut uit het vat, hoe verandert de hoogte van het bier in het vat op 0,2 m

Open vraag 3

Beschouw het doorstromingsplan van bezoekers in een pretpark om alles Covid safe te kunnen houden, hierbij is A de enige ingang terwijl B en C de twee uitgangen van het park zijn, we verwachten 400 bezoekers en we willen dat 100 mensen uitgang B gebruiken



- Geef de realistische (geen halve mensen of negatief aantal mensen) oplossingsverzameling waaraan a ($A \rightarrow B$), b ($C \rightarrow B$), c ($A \rightarrow C$) en d (uitgang C) moeten voldoen, hoeveel vrijheidsgraden heeft deze oplossingsverzameling en welke oplossingen zijn van economisch belang?
- Door veranderde Covid maatregelen kunnen vanaf nu maar de helft van de bezoekers het park binnen en we willen niet meer per se dat 100 mensen uitgang B gebruikt, geef de realistische (geen halve mensen of negatief aantal mensen) oplossingsverzameling waaraan a , b , c , d en e moeten voldoen, hoeveel

vrijheidsgraden heeft deze oplossingsverzameling en welke oplossingen zijn van economisch belang?

Open vraag 4

- a) Bewijs dat de $f^{(n)}(x) = n(n-1)\cos^{(n-2)}(x) + 2nx \cos^{(n-1)}(x) + x^2 \cos^{(n)}(x)$ de n -de orde benadering geeft voor alle $n \geq 2$ voor $f(x) = x^2 \cos(x)$
- b) Stel de Taylorreeks van $f(x)$ op rond 0 (je hoeft niet te bewijzen dat de limiet van de restterm naar 0 convergeert), wat is de convergentiestraal van de Taylorreeks
- c) Geef $P_4(x)$ als de 4-de orde benadering van $f(x)$, toon aan dat de gemaakte fout kleiner is dan $31/5!$ als je $f(1)$ benadert met de 4-de orde benadering $P_4(1)$, doe dit aan de hand van de middelwaardestelling van Taylor

Oplossing vraag a:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cos x$$

$$\forall n \geq 2 : f^{(n)}(x) = n(n-1) \cos^{(n-2)}(x) + 2nx \cos^{(n-1)}(x) + x^2 \cos^{(n)}(x)$$

Bewijs a.d.h.v. Inductie:

Inductiebasis: We bewijzen dat de stelling geldt voor de kleinste waarde van n , namelijk voor $n = 2$

$$\begin{array}{l} \textcircled{n=2} \quad \begin{array}{l} f(x) = x^2 \cos x \\ f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x \\ f''(x) = [2 \cos x - 2x \sin x] - [x^2 \cos x + 2x \sin x] \\ f'''(x) = 2 \cos x - 2x \sin x - x^2 \cos x - 2x \sin x \\ f^{(4)}(x) = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} f^{(2)}(x) = 2 \cdot (2-1) \cos^{(2-2)}(x) + 2 \cdot 2x \cos^{(2-1)}(x) + x^2 \cos^{(2)}(x) \\ f^{(2)}(x) = 2 \cos(x) + 4x \cos^{(1)}(x) + x^2 \cos^{(2)}(x) \\ f^{(2)}(x) = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \sin x \end{array} \right. \\ \text{Klopt! OK!} \end{array}$$

Inductiehypothese: We veronderstellen dat de stelling geldt voor n

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \cos^{(n-2)}(x) + 2nx \cos^{(n-1)}(x) + x^2 \cos^{(n)}(x)$$

Inductiestap: Als we weten dat stelling geldt voor n , dan tonen we nu aan dat ze dan ook geldt voor $n+1$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n(n-1) \cos^{(n-2)}(x) + 2nx \cos^{(n-1)}(x) + x^2 \cos^{(n)}(x) \\ \left(f^{(n)}(x) \right)' &= \left(n(n-1) \cos^{(n-2)}(x) \right)' + \left(2nx \cos^{(n-1)}(x) \right)' + \left(x^2 \cos^{(n)}(x) \right)' \\ f^{(n+1)}(x) &= \left[n(n-1) \cos^{(n-2+1)}(x) \right] + \left[2n \cos^{(n-1)}(x) + 2nx \cos^{(n-1+1)}(x) \right] + \left[2x \cos^{(n)}(x) + x^2 \cos^{(n+1)}(x) \right] \\ f^{(n+1)}(x) &= \underline{n(n-1) \cos^{(n-1)}(x)} + \underline{2n \cos^{(n-1)}(x)} + \underline{2nx \cos^{(n)}(x)} + \underline{2x \cos^{(n)}(x)} + \underline{x^2 \cos^{(n+1)}(x)} \\ f^{(n+1)}(x) &= \left[(n-1) + 2 \right] n \cos^{(n-1)}(x) + \left[n+1 \right] 2x \cos^{(n)}(x) + x^2 \cos^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)n \cos^{(n-1)}(x) + 2(n+1) \cos^{(n)}(x) + x^2 \cos^{(n+1)}(x) \quad \square$$

Conclusie: We hebben bewezen dat de stelling geldt voor alle $n \geq 2$.