EXAMEN HOGERE WISKUNDE II – 3 juni 2020

OPEN VRAGEN (15 punten)

Vraag 1

De rechte met vergelijking $y = x$ en de kromme met vergelijking $y^2 = x$ verdelen het xy-vlak in vijf gebieden, waarvan er slechts één begrensd is. Als we dit gebied D noemen, bereken dan

$$\int_D ye^x \, dx \, dy.$$

Vraag 2

In deze opgave behandelen we een uitbreiding van het spinnenwebmarktmodel. Verdeel de tijd in gelijke periodes, geïndexeerd door $n \in \mathbb{N}$, en noteer met p_n de prijs van een bepaald product in periode n. We nemen aan dat de vraag naar het product in periode n gegeven is door

$$V_n = -\alpha p_n + \beta,$$

met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$. In tegenstelling tot bij het klassieke spinnenwebmarktmodel, veronderstellen we nu dat producenten een goede manier hebben om de prijs in periode n te voorspellen en dat het aanbod aan het product in periode n hierdoor bepaald wordt als

$$A_n = \gamma p_n - \delta,$$

met $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_0^+$. In deze situatie is het voor producenten interessant om een stock van het product aan te leggen: als ze een prijsstijging verwachten, gaan ze een grotere hoeveelheid in stock houden en als ze een prijsdaling verwachten, een kleinere. We nemen dan ook aan dat de stock die wordt aangelegd in periode n (om in periode $n+1$ verkocht te worden) voldoet aan een vergelijking van de vorm

$$S_n = \varepsilon(p_{n+1} - p_n) + \zeta,$$

met $\varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}_0^+$. We gaan er ten slotte van uit dat de markt in evenwicht is, dus dat

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} + S_n = V_{n+1} + S_{n+1}.$$

(a) Vind een differentievergelijking voor de rij $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Toon aan dat er getallen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bestaan zodat de algemene oplossing van deze differentievergelijking gegeven is door

$$p_n = c_1 \lambda^n + c_2 \lambda^{-n} + \mu$$

voor willekeurige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en geef expliciete uitdrukkingen voor λ en μ in functie van α, β, γ, δ, ε en ζ.

Vraag 3

Een standaardellipsoïde in $\mathbb{R}^3$ is een oppervlak met een vergelijking van de vorm

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

waarbij a, b en c gegeven strikt positieve reële getallen zijn. Zo'n standaardellipsoïde omsluit een volume

$$\frac{4\pi}{3}\,abc.$$

Vind strikt positieve reële getallen a, b en c zodat de overeenkomstige standaardellipsoïde het punt $(1, 2, 1)$ bevat en een zo klein mogelijk volume omsluit.

Opmerking: Uit meetkundige overwegingen is het duidelijk dat zo'n standaardellipsoïde bestaat. Als je slechts één kandidaat vindt, mag je er dus van uit gaan dat dit de oplossing is.

Vraag 4

Om de coronaverveling tegen te gaan, hebben Alexander, Bieke en Charles het volgende spel bedacht. Ieder van hen kiest zijn of haar eigen beginscore. Daarna krijgt elk van hen na iedere ronde het gemiddelde van de scores van de twee anderen. Als ze bijvoorbeeld respectievelijk 3, 193 en 59 als beginscores zouden kiezen, dan evolueren de scores als volgt.

	Alexander	Bieke	Charles
Beginscore	3	193	59
Score na ronde 1	126	31	98
Score na ronde 2	64,5	112	78,5
⋮	⋮	⋮	⋮

De winnaar is degene die na 999 rondes de hoogste score heeft.

(a) Druk de scores van elk van de drie spelers na ronde n uit in functie van de scores na ronde $n-1$. (Hierbij is n een willekeurig geheel getal groter dan of gelijk aan 1 en bedoelen we met "de scores na ronde 0" de beginscores.)

(b) Als Alexander en Bieke hun beginscore eerst kiezen en bekendmaken, welke strategie zou je Charles dan aanraden om het spel te winnen? Verklaar je antwoord.

(c) Wat gebeurt er met de scores als ze niet stoppen na 999 rondes maar onbeperkt blijven doorspelen?

MEERKEUZEVRAGEN (5 punten)

Vraag 1

De afgeleide van de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \ln(t^2+1)\,dt$ is

(A) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x^2+1)$.

(B) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x\ln(x^2+1)$.

(C) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x^4+1)$.

(D) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x\ln(x^4+1)$.

Vraag 2

Beschouw de verzameling van alle reële (3×3)-matrices waarvoor, voor elke rij, de som van de elementen in die rij nul is en, voor elke kolom, de som van de elementen in die kolom ook nul is. Deze verzameling is een deelruimte van $\mathbb{R}^{3\times 3}$ met dimensie

(A) 1.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 9.

Vraag 3

Noteer met $S \subseteq \mathbb{R}^2$ de open schijf met middelpunt $(0,0)$ en straal π. Welke uitspraak over de functie $f : S \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + \cos(y^2)$ is juist?

(A) f heeft precies 1 lokaal minimum.

(B) f heeft precies 4 lokale minima.

(C) f heeft precies 5 lokale minima.

(D) f heeft precies 7 lokale minima.

Vraag 4

Gegeven is de functie $f :]-1,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Hoeveel afleidbare functies $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ bestaan er zodat $(fg)' = f'g'$?

(A) geen enkele

(B) juist één

(C) juist twee

(D) oneindig veel