BLOK I (open vragen, 15 punten)

WIT

1. Zij $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Bereken $\displaystyle\int_D \frac{2y}{1+x}\,dx\,dy$.

2. Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vind alle $a \in \mathbb{R}^+$ waarvoor A diagonaliseerbaar is en alle $a \in \mathbb{R}^+$ waarvoor A niet diagonaliseerbaar is. Onderbouw je berekeningen met een goed beargumenteerde redenering.

3. Beschouw de differentievergelijking
$y_{n+2} + (n+2)\,y_{n+1} - 6(n+2)(n+1)\,y_n = (n+2)!\,2^n$.
   (a) Zoek oplossingen van deze vergelijking van de vorm $y_n = n!\,u_n$ waarbij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een nader te bepalen rij is.
   (b) Wat is de **algemene** oplossing van de vergelijking? Leg ook zeer duidelijk uit **waarom je zeker bent** dat dit de algemene oplossing is.

4. Een zwembad is gevuld met $300\,\mathrm{m}^3$ water. Amper 8 uur voor het begin van een belangrijke zwemcompetitie stelt men vast dat de chloorconcentratie in het water het dubbele bedraagt van wat maximaal toegelaten is. Onder deze omstandigheden kan de competitie zeker niet doorgaan. Men overweegt daarom om het zwembad voor de helft leeg te pompen en er daarna weer zuiver water in te pompen. Dit zou inderdaad de chloorconcentratie tot een aanvaardbare hoeveelheid reduceren. Maar de capaciteit van zowel de pomp die leegpompt als de pomp die vult, bedraagt maximaal $30\,\mathrm{m}^3$ per uur. De hele operatie (voor de helft leegpompen en dan opnieuw bijvullen) zou dus $5+5=10$ uur duren en zoveel tijd is er niet meer.
Een tweede reddingsscenario wordt bedacht. Men zal beide pompen (de afzuigpomp en de vulpomp) simultaan op volle kracht laten werken (dus elk met een debiet van $30\,\mathrm{m}^3$ per uur). Ondertussen zal men ervoor zorgen dat er voldoende beweging in het water is zodat men kan aannemen dat het chloor op elk ogenblik homogeen in het water verspreid is. De totale hoeveelheid water in het zwembad blijft dus constant $300\,\mathrm{m}^3$, maar de totale hoeveelheid opgeloste chloor zal geleidelijk afnemen.
   (a) Modelleer het tweede reddingscenario met een beginvoorwaardenprobleem voor de functie $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto c(t)$ die de chloorconcentratie in het water van het zwembad in functie van de tijd beschrijft.
   (b) Gebruik (a) om na te gaan of men met het tweede scenario erin zal slagen tijdig de chloorconcentratie te halveren. Maak een verzorgde redenering en berekening!

5. In een bepaald economisch model beschrijft men de verbanden tussen 3 economische grootheden, x, y en u, aan de hand van twee vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + f(y) = u \\ g(x-y,u) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Hierin is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie met een continue afgeleide en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden. Een expliciet functievoorschrift voor f en g heeft men niet. Uit economische overwegingen weet men wel dat geldt dat

$$f'(t) > -1 \ \text{ voor alle } t \in \mathbb{R},$$
$$D_1 g(s,t) > 0,\ D_2 g(s,t) > 0 \ \text{ voor alle } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

De variabele u kan beschouwd worden als exogeen; de variabelen x en y zijn endogeen. We vatten $(*)$ dus op als een stelsel voor x en y met u als parameter. Veronderstel dat de huidige waarde van de drie grootheden gegeven wordt door (x^*, y^*, u^*), een drietal dat dus voldoet aan $(*)$.
   (a) Argumenteer nauwkeurig (op basis van de impliciete functiestelling) waarom het stelsel $(*)$, voor waarden van u die dicht genoeg liggen bij u^*, een unieke oplossing (x,y) in de buurt van (x^*, y^*) heeft.
   (b) Uit het vorige volgt dat de endogene grootheden x en y éénduidig functie zijn van de exogene variable u (althans voor waarden van u in de buurt van u^*). Veronderstel nu dat u stijgt. Onderzoek wat er dientengevolge met y zal gebeuren. Zal de grootheid y stijgen of dalen?

6. Beschouw volgend gebonden maximalisatieprobleem:

$$\left|\ \begin{array}{l} \text{Maximaliseer } f(x,y,z) \\ \text{onder de randvoorwaarden } \begin{cases} x+y+z = c, \\ x^2+y^2+z^2 = c^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Hierin is $c \in \,]1,3[$ en is $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden. Beschouw de geassocieerde Lagrangefunctie L en noteer de Lagrangemultiplicator geassocieerd aan de eerste resp. tweede randvoorwaarde met λ resp. μ. Veronderstel dat L voor elke $c \in \,]1,3[$ een uniek kritiek punt $(x_c^*, y_c^*, z_c^*, \lambda_c^*, \mu_c^*)$ heeft. Merk op dat in het algemeen dat kritiek punt uiteraard zal afhangen van c; vandaar de index c in de notatie. Veronderstel bovendien dat de functies $c \mapsto x_c^*$, $c \mapsto y_c^*$, $c \mapsto z_c^*$, $c \mapsto \lambda_c^*$ en $c \mapsto \mu_c^*$ afleidbaar zijn op $]1,3[$.
Beschouw nu de functie $M : \,]1,3[\to \mathbb{R}$ gegeven door $M(c) = f(x_c^*, y_c^*, z_c^*)$.
Stel een formule op die $M'(c)$ uitdrukt in termen van de Lagrangemultiplicatoren λ_c^* en/of μ_c^*. In je formule voor $M'(c)$ mogen geen partiële afgeleiden van f

voorkomen.

Opmerking: met het "opstellen van een formule" bedoelen we natuurlijk dat je je geenszins kan beperken tot het louter "raden" en/of neerschrijven van een formule. Je moet de formule uiteraard zodanig stap voor stap afleiden dat je meteen een **bewijs** *voor de geldigheid ervan levert. Je kan je hierbij best laten inspireren door het bewijs van de stelling die de economische betekenis van de Lagrangre-multiplicatoren beschrijft.*

BLOK II (meerkeuzevragen: 5 punten) WIT

Telkens één alternatief is correct. **Vul de corresponderende letter DUIDELIJK en ONDUBBELZINNIG in in de TABEL op het eerste blad**. **Omcirkel hier bij de opgaven je antwoorden NIET**. Gok niet blindelings want voor een foutief antwoord wordt 1/3 van de punten afgetrokken die je met een juist antwoord kunt verdienen. Wanneer je het antwoord echt niet weet, is het dus wijs om de vraag blanco te laten.

1. We noemen een vierkante matrix A antisymmetrisch als $A^t = -A$. Beschouw in de vectorruimte $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de deelruimte $\mathcal{A}$ van alle antisymmetrische (3×3)-matrices. De dimensie van $\mathcal{A}$ is gelijk aan

   (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 9

2. In $\mathbb{R}^3$ beschouwen we een rechte R en een vlak V. Welke van de onderstaande uitspraken is in het algemeen equivalent met de uitspraak dat R loodrecht staat op V?

   (A) $\forall r_1, r_2 \in R,\ \forall v_1, v_2 \in V : \langle (r_1 - r_2), (v_1 - v_2)\rangle = 0.$
   (B) $\forall r_1, r_2 \in R,\ \forall v \in V : \langle (r_1 - r_2), v\rangle = 0.$
   (C) $\forall r \in R,\ \forall v_1, v_2 \in V : \langle r, (v_1 - v_2)\rangle = 0.$
   (D) $\forall r \in R,\ \forall v \in V : \langle r, v\rangle = 0.$

3. Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een overal gedefinieerde functie met continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orde. Zij $x^* \in \mathbb{R}^3$ een kritiek punt van f. Noteer de eigenwaarden van de Hessiaan van f in x^* met λ_1, λ_2 en λ_3 Veronderstel dat $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ en $\lambda_3 = 0$. Wat mag je besluiten?

   (A) f bereikt zeker geen lokaal minimum in x^*.
   (B) f heeft een zadelpunt in x^*.
   (C) f bereikt een lokaal maximum in x^*.
   (D) Geen van de vorige.

4. Welke vorm zou je voorstellen voor een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + 9y = 5\sin 3x - 7e^{-x}$?

   (A) $y = a\,\sin 3x + b\,\cos 3x + c\,e^{-x}$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ nader te bepalen)
   (B) $y = ax\,\sin 3x + b\,\cos 3x + c\,e^{-x}$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ nader te bepalen)
   (C) $y = ax\,\sin 3x + bx\,\cos 3x + c\,e^{-x}$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ nader te bepalen)
   (D) $y = ax\,\sin 3x + bx\,\cos 3x + cx\,e^{-x}$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ nader te bepalen)

5. Je modelleert een economisch probleem en verkrijgt zo een optimalisatieprobleem met n variabelen en m $(< n)$ randvoorwaarden gegeven door gelijkheden. We gaan er van uit dat dit een "wiskundig braaf" probleem is, d.w.z. dat de betrokken functies aan alle vereiste regulariteitseigenschappen, zoals afleidbaarheid, voldoen. Om de voldoende voorwaarde voor een gebonden lokaal extremum te checken moet je het teken van een aantal determinanten nagaan.
   Veronderstel nu dat je het model verfijnt: daartoe neem je 5 extra veranderlijken in je doelfunctie op en voeg je 3 randvoorwaarden toe waarin die nieuwe veranderlijken samen met de oude voorkomen. Je fijner model is dus een optimalisatieprobleem (nog steeds "wiskundig braaf", nemen we aan) met $n + 5$ veranderlijken en $m + 3$ randvoorwaarden. Het aantal determinanten waarvan je het teken moet nagaan om de voldoende voorwaarde voor een gebonden lokaal extremum te checken, is ten opzichte van het eerste model

   (A) met 2 toegenomen. (C) met 5 toegenomen.
   (B) met 3 toegenomen. (D) met 8 toegenomen.

6. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie die minstens twee keer afleidbaar is. Veronderstel dat $f''(x) \leq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Men wil $I = \int_a^b f(x)\,dx$ numeriek benaderen zowel met de trapeziumregel als met de regel van Simpson. Bij beide benaderingen wordt het interval $[a, b]$ in eenzelfde even aantal, zeg $2n$, deelintervallen van gelijke lengte verdeeld. Noteer met T de benadering van I die via de trapeziumregel verkregen wordt; S is de benadering die via de Simpsonregel berekend wordt. Welke van onderstaande ongelijkheden geldt met zekerheid?

   (A) $I \leq T$ en $|S - I| \leq |T - I|$.
   (B) $T \leq S \leq I$.
   (C) $T \leq I$ en over de positie van S t.o.v. I en T kan je niets zeggen.
   (D) $I \leq T$ en over de positie van S t.o.v. I en T kan je niets zeggen.

!!! Heb je je antwoorden op de meerkeuzevragen ingevuld in de gepaste tabel vooraan ?

Succes !