

Proefexamen Hogere Wiskunde I – Oplossingen 2013-2014

Vraag 1

① stel $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 5^n \geq 8n^2 - 4n + 1\}$

1. we tonen aan dat $1 \in S$. (basisstap)

$$5^1 \geq 8 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$$

$$5 \geq 5. \text{ klopt.}$$

2. Als $m \in S$ dan $m+1 \in S$ (aanname)

$m \in S$ dus: $5^m \geq 8m^2 - 4m + 1$ (inductiehypothese)

$$8(m+1)^2 - 4(m+1) + 1 = 8(m^2 + 2m + 1) - 4m - 4 + 1$$

$$5^{m+1} = 5^m \cdot 5 \stackrel{IH}{\geq} (8m^2 - 4m + 1) \cdot 5 = 40m^2 - 20m + 5$$

$$= 8m^2 + 12m + 5 + 32m^2 - 32m$$

$$= 8m^2 + 12m + 5 + 32(m^2 - m). \text{ Omdat } m \in \mathbb{N}_0, \text{ geldt dat } m^2 - m \geq 1$$

$$\geq 8m^2 + 12m + 5 = 8(m+1)^2 - 4(m+1) + 1.$$

3. Conclusie: met het principe van volledige inductie, volgt nu dat

$$5^n \geq 8n^2 - 4n + 1 \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}_0$$



Vraag 2

Vraag 2:

$$f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in [0, 1[\forall x \in]\delta, 1[: |f(x) - 2| < \varepsilon \quad (*)$$

Stel (*) is niet waar $\rightarrow$ (minstens een) $\exists \varepsilon > 0$,
 $\forall \delta \in [0, 1[: \exists x \in]\delta, 1[: |f(x) - 2| \geq \varepsilon$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

a_n

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists x_n \in]a_n, 1[: |f(x_n) - 2| \geq \varepsilon$$

$$0_n < x_n < 1$$

$\searrow \frac{1}{n} \nearrow$ convergeert allemaal naar 1

Stelling voor (*) is onwaar

Vraag 3

Beschouw een functie $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto h(t)$ met $h(t)$ is de wisselkoers op het moment t .

NET

Nu weten we dat $h(0) = h(10)$ (geg).

We zoeken nu naar een $t \in [0, 5]$ waarvoor geldt $h(t) = h(t+5)$.

Beschouw dus nu de functie $g: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = h(t) - h(t+5)$.

We zoeken dus een nulpunt van deze functie g . En dit zullen we kunnen vinden want:

$$+ g(0) = h(0) - h(5)$$

$$+ g(5) = h(5) - h(10) = h(5) - h(0) \quad (\text{geg}).$$

Nu zijn er drie mogelijke gevallen:

① $h(5) = h(0)$

Dan hebben we ons nulpunt gevonden.

② $h(5) < h(0)$

Dan geldt: $g(0) > 0$ en $g(5) < 0$.

Omdat g een functie is die bestaat uit twee keer dezelfde continue functie h , zal g ook continu zijn.

Dan kunnen we de tussenwaardestelling toepassen:

Deze garandeert ons dat er een $t \in]0, 5[$ zal bestaan zodat $g(t) = 0$.

③ $h(5) > h(0)$

Dan geldt: $g(0) < 0$ en $g(5) > 0$.

Omdat g een functie is die is opgebouwd uit de continue functie h , zal g ook continu zijn.

Dan kunnen we de tussenwaardestelling toepassen:

Deze garandeert ons dat er een $t \in]0, 5[$ bestaat zodat $g(t) = 0$.

Meerkeuzevragen

- 4.
- (A) 2 functies die elkaar snijden
 - (B) 2 functies die samenvallen
 - (C) Juiste antwoord
 - (D) Hoeft niet per se juist te zijn, niet equivalent

- 5.
- (C) Exponentiële zal altijd hoger liggen

- 6.
- (A) Geen gesloten verzameling
 - (B) Niet begrensd
 - (C) Niet begrensd
 - (D) Juiste antwoord