BLOK I (open vragen, 15 punten)

WIT

1. Beschouw een $a \in \mathbb{R}_0^+$. We weten dat voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ geldt dat $a^{r+s} = a^r\, a^s$. Gebruik dit samen met de definitie van de exponentiële functie met grondtal a op gans $\mathbb{R}$ om aan te tonen dat
$$a^{x+y} = a^x\, a^y \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{R}.$$
Als je in je argumentatie gebruik maakt van bepaalde stellingen of eigenschappen moet je die nauwkeurig formuleren en tevens precies aangeven hoe je die stellingen/eigenschappen hier toepast.

2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orde en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die afleidbaar is minstens tot de tweede orde. Beschouw de functie
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x - y, g(x + 2y)).$$
Bereken $D^2_{12}h(x, y)$ in termen van de partiële afgeleiden van f en de afgeleiden van g.

3. Gebruik de middelwaardestelling van Taylor om aan te tonen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat
$$e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2.$$
Geef nauwkeurig aan hoe je die stelling hier toepast.

4. Een transportfirma verzendt goederen die verpakt zijn in balkvormige kartonnen dozen waarvan het buitenvolume maximaal 64 000 cm^3 bedraagt. Om de goederen te beschermen moet (aan de binnenzijde van de doos) piepschuim aangebracht worden: aan de zijkanten 3,5 cm dik, aan de onder- en bovenkant 7,5 cm dik. Het karton van de doos is 0,5 cm dik. Je wil een doos met buitenvolume van precies 64 000 cm^3 ontwerpen waarvan het binnenvolume (dus het netto volume dat beschikbaar is binnen de piepschuimen bescherming) zo groot mogelijk is. Welke buitenafmetingen zal je die doos geven?
Ga systematisch en ordentelijk te werk! Beperk je niet tot 'woordenloze' berekeningen maar leg ook uit hoe je te werk gaat. Geef je resultaat exact (dus geen numerieke benaderingen met rekenmachines).

5. Beschouw de (10×10)-matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,10}$ gegeven door $a_{i,j} = i + j$. Bereken $\det(A)$. Leg uit hoe je hierbij te werk gaat.

6. Veronderstel dat a en b reële getallen zijn die voldoen aan $a + b = 1$, $a = a^2$ en $b = b^2$. Dan zijn er slechts twee mogelijkheden, namelijk ($a = 0$ en $b = 1$) of ($a = 1$ en $b = 0$).
Geldt dit ook voor vierkante matrices? Concreet, zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat
$$A + B = \mathbb{1}_n, \quad A = A^2 \quad \text{en} \quad B = B^2.$$
Kunnen we dan besluiten dat ($A = 0_n$ en $B = \mathbb{1}_n$) of ($A = \mathbb{1}_n$ en $B = 0_n$) ?
Als je zegt dat dit geldt moet je een algemeen bewijs geven. Als je zegt dat dit niet geldt moet je een expliciet tegenvoorbeeld geven.

BLOK II (meerkeuzevragen: 5 punten)

WIT

Telkens één alternatief is correct. **Vul de corresponderende letter DUIDELIJK en ONDUBBELZINNIG in in de TABEL op het eerste blad. Omcirkel hier bij de opgaven je antwoorden NIET**. Gok niet blindelings want voor een foutief antwoord wordt 1/3 van de punten afgetrokken die je met een juist antwoord kunt verdienen. Wanneer je het antwoord echt niet weet, is het dus wijs om de vraag blanco te laten.

1. Gegeven zijn drie rijen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in $\mathbb{R}$. Je weet dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeren. De rij $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar 2. Je wil door enkel te steunen op de definitie aantonen dat $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)z_n = 0$. Daartoe heb je een willekeurige $\varepsilon > 0$ gekozen. Je moet nu op zoek gaan naar een $n_0 \in \mathbb{N}$ zo dat
$$|(x_n + y_n)z_n| < \varepsilon \text{ voor alle } n \geq n_0. \qquad (*)$$
Door gebruik te maken van de gegevens heb je reeds een $n_1 \in \mathbb{N}$ gevonden zo dat $|x_n| < \varepsilon/6$ voor alle $n \geq n_1$, een $n_2 \in \mathbb{N}$ zo dat $|y_n| < \varepsilon/6$ en een $n_3 \in \mathbb{N}_0$ zo dat $1 < z_n < 3$ voor alle $n \geq n_3$. Wat is dan een mogelijke keuze voor n_0 opdat $(*)$ zou gelden?

(A) $n_0 \geq \max\{n_1/n_3, n_2/n_3\}$
(B) $n_0 \geq (n_1 + n_2)/n_3$
(C) $n_0 = n_1 + n_2 + n_3$
(D) $n_0 = n_1 n_2 - n_3$

2. Zij A een $(n \times m)$-matrix. We beschouwen lineaire stelsels met n vergelijkingen en m onbekenden met als coëfficiëntenmatrix A. Welke uitspraak is juist?
   (A) Als er één rechterlid B_0 bestaat waarvoor het stelsel $AX = B_0$ strijdig is, dan is het stelsel $AX = B$ strijdig voor elk rechterlid B.
   (B) Als er één rechterlid B_0 bestaat waarvoor het stelsel $AX = B_0$ een unieke oplossing heeft, dan heeft het stelsel $AX = B$ een unieke oplossing voor elk rechterlid B.
   (C) Als er één rechterlid B_0 bestaat waarvoor het stelsel $AX = B_0$ oneindig veel oplossingen heeft, dan heeft het stelsel $AX = B$ oneindig veel oplossingen voor elk rechterlid B.
   (D) Geen van bovenstaande uitspraken geldt in het algemeen.

3. Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie is met continue partiële afgeleiden die antisymmetrisch is in de zin dat $f(x,y) = -f(y,x)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Voor de rest is over f **niets gegeven**. Dan geldt:
   (A) voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ is $D_1 f(x,y) = -D_1 f(y,x)$.
   (B) voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ is $f(x,y) = x\, D_1 f(x,y) + y\, D_2 f(y,x)$.
   (C) voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ is $D_1 f(x,y) = -D_2 f(y,x)$.
   (D) Geen van vorige geldt in het algemeen.

4. Beschouw volgende eis op een complex getal $z \in \mathbb{C}$ verschillend van -1:
$$\left| \frac{1-z}{1+z} \right| < 1.$$
   Deze conditie is equivalent met
   (A) z is reëel en ligt in het interval $]0, 1]$.
   (B) z is niet zuiver imaginair.
   (C) $|z| < 1$.
   (D) Het reëel gedeelte van z is strikt positief.

5. Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een homogene functie is. Over de homogeniteitsgraad van f is niets gegeven. Welk van de onderstaande functies is in het algemeen niet homogeen?
   (A) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(xy, yz, zx)$.
   (B) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : (u,v,x,y) \mapsto f(u/v, x/y, 1)$.
   (C) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x\,|f(y-z, z, y)|$.
   (D) Bovenstaande functies zijn alle drie altijd homogeen.

6. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een willekeurige niet-constante functie en beschouw de functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(xy)$ Welke uitspraak is juist?
   (A) g kan nooit een lokaal extremum bereiken.
   (B) Afhankelijk van f kan g eventueel wel een lokaal extremum bereiken maar als g een lokaal extremum bereikt, zal dat nooit globaal extremum zijn.
   (C) Afhankelijk van f kan g eventueel wel een globaal extremum bereiken en als g een globaal extremum bereikt, zijn er oneindig veel punten waarin g die globaal extreme waarde aanneemt
   (D) geen van bovenstaande uitspraken is correct.

!!! Heb je je antwoorden op de meerkeuzevragen ingevuld in de gepaste tabel vooraan ?

Succes !