BLOK I (open vragen, 15 punten)

WIT

1. Veronderstel dat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie is die continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orde heeft. Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{2y}\, g(xy, -x).$$

Bereken $D^2_{12} f(x, y)$ in termen van de partiële afgeleiden van g.

2. Veronderstel dat N een $(n \times n)$-matrix is, verschillend van de nulmatrix, waarvoor er een $k \geq 2$ bestaat waarvoor $N^k = 0$.
   (a) Illustreer met een voorbeeld voor het geval $n = 3$ dat dergelijke matrices N bestaan.
   (b) Toon aan (voor algemene n) dat de matrix $A = \mathbb{1} + N$ inverteerbaar is én dat er $(k-1)$ getallen, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$, bestaan zo dat

$$A^{-1} = \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j N^j.$$

   Tip: je kan best beide zaken met één en hetzelfde argument aantonen.

3. Een monopolist produceert een goed waarvoor de totale kostfunctie gegeven wordt door

$$K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : q \mapsto K(q) = 6q + q^2/2.$$

Hierbij stelt q de productiehoeveelheid voor en $K(q)$ de bijbehorende totale kost, beiden uitgedrukt in niet nader gespecificeerde eenheden. De monopolist biedt zijn goed aan op een lokale thuismarkt die gekenmerkt wordt door volgende (inverse) vraagfunctie (dit is de functie die beschrijft hoe de marktprijs afhangt van de aangeboden hoeveelheid):

$$P_t : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : q_t \mapsto P_t(q_t) = \begin{cases} 66 - q_t/2 & \text{als } q_t \leq 132, \\ 0 & \text{als } q_t > 132. \end{cases}$$

Bovendien heeft de monopolist de mogelijkheid om zijn goed aan te bieden op een buitenlandse markt (gescheiden van de lokale thuismarkt). Die buitenlandse markt wordt gekenmerkt door volgende (inverse) vraagfuctie:

$$P_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : q \mapsto P_b(q_b) = \begin{cases} 86 - q_b & \text{als } q_b \leq 86, \\ 0 & \text{als } q_b > 86. \end{cases}$$

Om het goed naar die buitenlandse markt te transporteren moet de monopolist wel een extra transportkost betalen. Momenteel betaalt de monopolist voor dat transport 45 prijseenheden per eenheid van het goed. Op een bepaald moment kondigt de transporteur aan dat hij de transportkost zal moeten optrekken tot 55 prijseenheden per eenheid van het goed. De monopolist wil in alle omstandigheden zijn winst maximaliseren. Bereken hoeveel eenheden van het goed de monopolist op beide markten

   (a) aanbiedt bij de huidige transportkosten,
   (b) zal aanbieden na de stijging van de transportkosten.

Formuleer de redeneringen die je maakt, expliciet en zeer zorgvuldig. Wat losse berekeningen zonder woorden zijn waardeloos.

4. Bestaan er functies $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die aan elk van onderstaande eigenschappen voldoen?
   (a) Voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ is $f(\lambda x, y, z) = \lambda f(x, y, z)$,
   (b) voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ is $f(x, y, z) = -f(x, z, y)$,
   (c) voor alle $x \in \mathbb{R}$ is de functie $f(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (y, z) \to f(x, y, z)$ lineair,
   (d) $f(1, 2, 3) = 4$.

   Zo ja, vind ze allemaal en geef hierbij aan hoe je te werk gaat; zo nee, bewijs nauwkeurig dat er geen functies zijn die aan alle opgelegde eigenschappen voldoen.

5. Toon aan dat voor alle $b \in \mathbb{R}$ en alle $a \in \mathbb{R}$ met $|a| > 1$ de vergelijking

$$ax + b - \cos x = 0$$

precies één oplossing heeft voor $x \in \mathbb{R}$. Splits je bewijs op in twee delen: (a) minstens één oplossing en (b) hoogstens één oplossing. Als je bij je argumentatie beroep doet op bepaalde resultaten (proposities, stellingen, ...), dan moet je expliciet vermelden **welke** resultaten je gebruikt en **hoe** je die hier toepast.

6. Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een begrensde continue functie. Veronderstel dat $g(1, 1, 1) = 4 = -g(-1, -1, -1)$. Beschouw nu de functie

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \frac{g(x, y, z)}{1 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

   (a) Mag je besluiten dat f een globaal minimum bereikt op $\mathbb{R}^3$? Argumenteer!
   (b) Mag je besluiten dat f een globaal maximum bereikt op $\mathbb{R}^3$? Argumenteer!

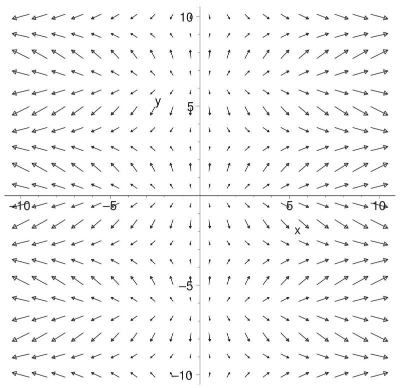
   Als je bij je argumentatie beroep doet op bepaalde resultaten (proposities, stellingen, ...), dan moet je expliciet vermelden **welke** resultaten je gebruikt en **hoe** je die hier toepast.

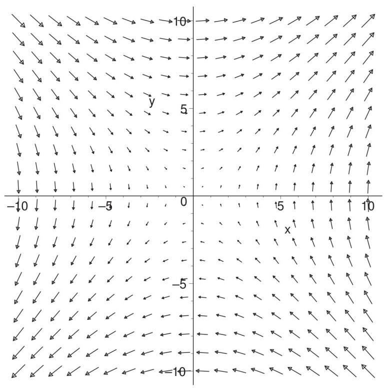
BLOK II (meerkeuzevragen: 5 punten)

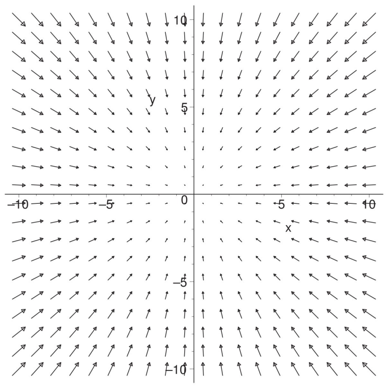
WIT

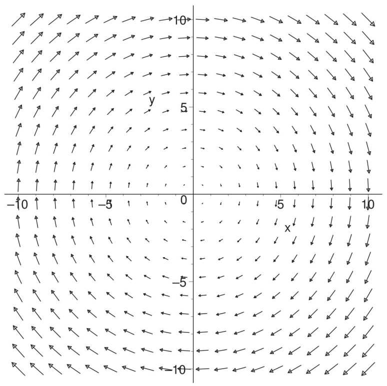
Telkens één alternatief is correct. **Vul de corresponderende letter DUIDELIJK en ONDUBBELZINNIG in in de TABEL op het eerste blad. Omcirkel hier bij de opgaven je antwoorden NIET**. Gok niet blindelings want voor een foutief antwoord wordt 1/3 van de punten afgetrokken die je met een juist antwoord kunt verdienen. Wanneer je het antwoord echt niet weet, is het dus wijs om de vraag blanco te laten.

1. Welke van de onderstaande pijltjespatronen stelt NIET het gradiëntvectorveld van een (partiëel afleidbare) functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voor?

(A) 

(C) 

(B) 

(D) 

2. Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}_0$. Beschouw de rij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeven door

$$y_n = \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Welke uitspraak is juist?

(A) Als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is, is $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ook begrensd.
(B) Als $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is, is $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ook begrensd.
(C) Als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een eindige limiet heeft, is $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.
(D) Geen van vorige uitspraken geldt.

3. Veronderstel dat A een (2016×2016)-matrix is met $\text{rang}(A) = 1008$. We vormen een nieuwe matrix door rechts naast de matrix A nogmaals de matrix A te herhalen. We verkrijgen zo een (2016×4032)-matrix die we met B noteren. Wat mag je besluiten over $\text{rang}(B)$?

(A) $\text{rang}(B) = 1008$.
(B) $\text{rang}(B) = 2016$.
(C) $\text{rang}(B) = 4032$.
(D) $\text{rang}(B) \geq 1008$ en door A op de gepaste manier te kiezen kunnen we elk natuurlijk getal n met $1008 \leq n \leq 2016$ verkrijgen voor $\text{rang}(B)$.

4. A en B zijn gegeven $(n \times n)$-matrices verschillend van de nulmatrix. Voor een $\lambda \in \mathbb{R}$ stellen we $C_\lambda = A + \lambda B$. Noteer met k het aantal (verschillende) waarden van λ waarvoor C_λ niet inverteerbaar is. Dan geldt:

(A) De waarde van k hangt af van de details van A en B, maar k is altijd eindig.
(B) De waarde van k hangt af van de details van A en B, maar altijd is $k > 0$.
(C) k kan oneindig zijn, maar als k eindig is, is $k \leq n$.
(D) $k = n^2$.

5. Veronderstel dat z een complex getal is. De eis dat $|z^n - 2i| \leq 3$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ is equivalent met

(A) $|z| \leq 5$.
(B) $|z| = 1$.
(C) $|z^n - 2i| \leq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
(D) $|z^n - 2i| \leq 4$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

6. Beschouw een onbeperkt afleidbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Haar Taylorreeks rond 1, dus de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$, heeft convergentiestraal 4. Beschouw nu de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = f(2x-1)$. Wat is de convergentiestraal van de Taylorreeks van g rond 1?

(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8

!!! Heb je je antwoorden op de meerkeuzevragen ingevuld in de gepaste tabel vooraan ?

Succes !