Monitoraat 1

Stelsels

1. Beschouw het volgende stelsel

$$V : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (V_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (V_2) \end{cases}$$

met $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ en $a_i \neq 0$ voor $i = 1, 2$.
Bewijs dat het nieuwe stelsel V^*, ontstaan door V_1 onveranderd te laten en V_2 te vervangen door $\frac{a_2}{a_1}V_1 - V_2$, dezelfde oplossingen heeft als het stelsel V.

Matrixrekenen

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dan geldt $(AB)^t = B^tA^t$.
Bewijs deze eigenschap.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

3. Beschouw volgende uitspraak:
Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Stel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $A^k = 0$. Dan is $\mathbb{1}_n - A$ inverteerbaar.
Bewijs deze uitspraak door expliciet een formule te geven voor de inverse van $\mathbb{1}_n - A$.

Toepassingen

4. Muskusratten krijgen veel jongen. Gemiddeld krijgen in 1 jaar de nuljarigen 0,6 jongen, de éénjarigen 3,5 jongen, de tweejarigen 2,4 jongen en de driejarigen 1,2 jongen. De dieren worden niet ouder dan 4 jaar. De helft van de jongen komt het eerste levensjaar niet door. Voor de één- en tweejarigen is de kans om een jaar ouder te worden telkens 75 %.
   (a) Stel een tabel op die uitdrukt hoe het aantal nuljarigen, éénjarigen, tweejarigen en driejarigen in een bepaald jaar afhangt van het aantal nuljarigen, éénjarigen, tweejarigen en driejarigen het jaar daarvoor.
   (b) Stel een model op dat uitdrukt hoe de populatie evolueert van jaar tot jaar.
   (c) Veronderstel dat we starten met een populatie van enkel nuljarigen en stel dat ze met 645 zijn. Welke populatie kunnen we op basis van deze gegevens 3 jaar later verwachten?

5. Beschouw een economisch systeem met drie producerende sectoren: landbouw (L), bouw (B) en textiel (T). Stel dat volgende relaties gelden:
Om 1 eenheid L te produceren heb je 0,2 eenheden L, 0,4 eenheden B en 0,1 eenheden T nodig. Anderzijds moet je voor de productie van 1 eenheid output B 0,3 eenheden L, 0,1 eenheden B en 0,3 eenheden T gebruiken. Tenslotte heb je voor 1 eenheid T 0,2 eenheden L, 0,2 eenheden B en 0,2 eenheden T nodig.
Bovendien is er een externe vraag van 10 eenheden L, 20 eenheden B en 6 eenheden T.

   (a) Zij x_L (resp. x_B, x_T) het aantal eenheden productie van de landbouwsector (resp. van de bouw- en textielsector). Stel een stelsel van de volgende vorm op dat de productie van de verschillende sectoren bij evenwicht (input=output) uitdrukt:
   $X = AX + V$ met $X = \begin{pmatrix} x_L \\ x_B \\ x_T \end{pmatrix}$, A de inputmatrix en V de matrix die de externe vraag voorstelt.

   (b) Los dit stelsel op.

Monitoraat 1

Stelsels

oef 1 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{V_2 \to \frac{a_2}{a_1} V_1 - V_2} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & \frac{a_2 b_1}{a_1} - b_2 & \frac{c_1 a_2}{a_1} - c_1 & \frac{d_1 \cdot a_2}{a_1} - d_2 \end{bmatrix}$

nieuw stelsel is dan $V^* \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & V_1^* \\ \left(\frac{a_2 b_1}{a_1} - b_2\right) y + \left(\frac{c_1 a_2}{a_1} - c_1\right) z = \left(\frac{d_1 a_2}{a_1} - d_2\right) & V_2^* \end{cases}$

We moeten nu bewijzen dat

① elke oplossing van V een oplossing v V^* is.

② " " " V^* " " " V is

voorbeeld

$V \begin{cases} 3x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $V^* \begin{cases} 3x + z = 0 \end{cases}$ (geen voorwaarde voor y)

Zij $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ een (willekeurige oplossing v V.

Dan geldt $a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 = d_1$. (1)

en $a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 = d_2$ (2)

nu aantonen dat (x_0, y_0, z_0) een oplossing v V_1^* en V_2^*

~~$\left(\frac{a_2 b_1}{a_1} - b_2\right) y + \left(\frac{c_1 a_2}{a_1} - c_1\right) z = \frac{a_2}{a_1}\left(a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0\right)$~~

Als we nu vgl 1 met $\frac{a_2}{a_1}$ en hiervan V_2 aftrekken krijgen we
$\left(\frac{a_2}{a_1}(1) - (2)\right)$

$$\left(\frac{a_2}{a_1} b_1 - b_2\right) y_0 + \left(\frac{a_2}{a_1} c_1 - c_2\right) z_0 = \frac{a_2}{a_1} d_1 - d_2$$

Dus (x_0, y_0, z_0) voldoet aan V_2^*

Dus (") is een opl v V_1^*

② analoog.

Matrixregels

$AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$

oef 2 matrix A
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
matrix B
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

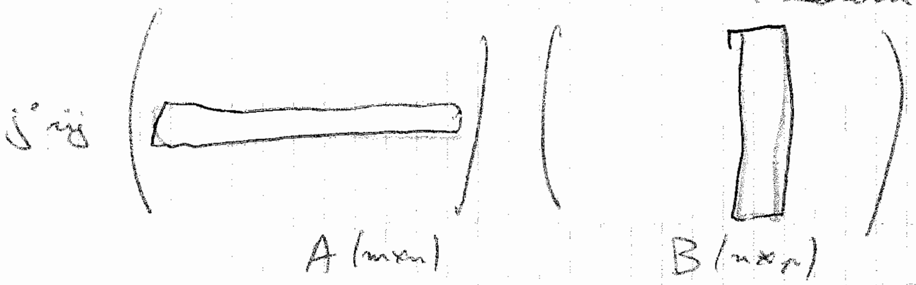
T.B $((AB)^t)_{i,j} = (B^t \cdot A^t)_{i,j}$ met $i \in \{\ ,\ \}$

$j \in \{\ ,\ \}$

uitschrijven

$\{(AB)^t\}_{i,j} = (AB)_{j,i}$

i^e kolom



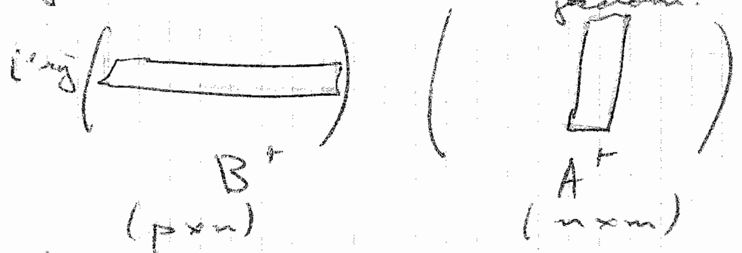
$= a_{j1} \cdot b_{1i} + a_{j2} \cdot b_{2i} + \cdots + a_{jn} \cdot b_{ni}$

rechterlid uitschrijven

$(B^t \cdot A^t)_{i,j} \neq (B \cdot A)_{j,i}$

$(B^t \cdot A^t)_{ij}$

j^e kolom



$= (b_{1i})^t (a_{1j})^t + (b_{i2})^t (a_{2j})^t + \cdots + (b_{in})^t (a_{nj})^t$

$= (B^t)_{i,1} \ (A^t)_{1,j} + (B^t)_{i,2} \ (A^t)_{2,j} + \cdots + (B^t)_{i,n} \cdot (A^t)_{n,j}$.

$\boxed{oe/3}$ tip.

Denk aan.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \iff 1 = (1-x)(1 + x + x^2 + \dots)$$

voor $|x| < 1$.

T.B $(\mathbb{1}_n - A) \cdot Q = \mathbb{1}_n$ als $A^k = 0$.

Q wat we zoeken (inverse v $(\mathbb{1}_n - A)$)

$$(\mathbb{1}_n - A) \cdot (\mathbb{1}_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$$

= eerst alles maal eenheidsmatrix

− alles maal A

$\Rightarrow$ dan bekom je $\mathbb{1}_n$.

$$\begin{array}{l} \mathbb{1}_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1} \\ \underline{- A - A^2 + \dots - A^{k-1} - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{A^k}} \end{array}$$

$= \mathbb{1}_n$

toepassingen

(a)

		nu			
		0 jarigen	1 jarigen.	2	3
volgend jaar	0	0,6	3,5	2,4	1,2
	1	0,5	0	0	0
	2	0	0,75	0	0
	3	0	0	0,75	0

(b) stel x_n = aantal nulj in jaar n.

y_n = " eenj " " "

z_n = " tweej " " "

t_n = " driej " " "

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} X_n .$$

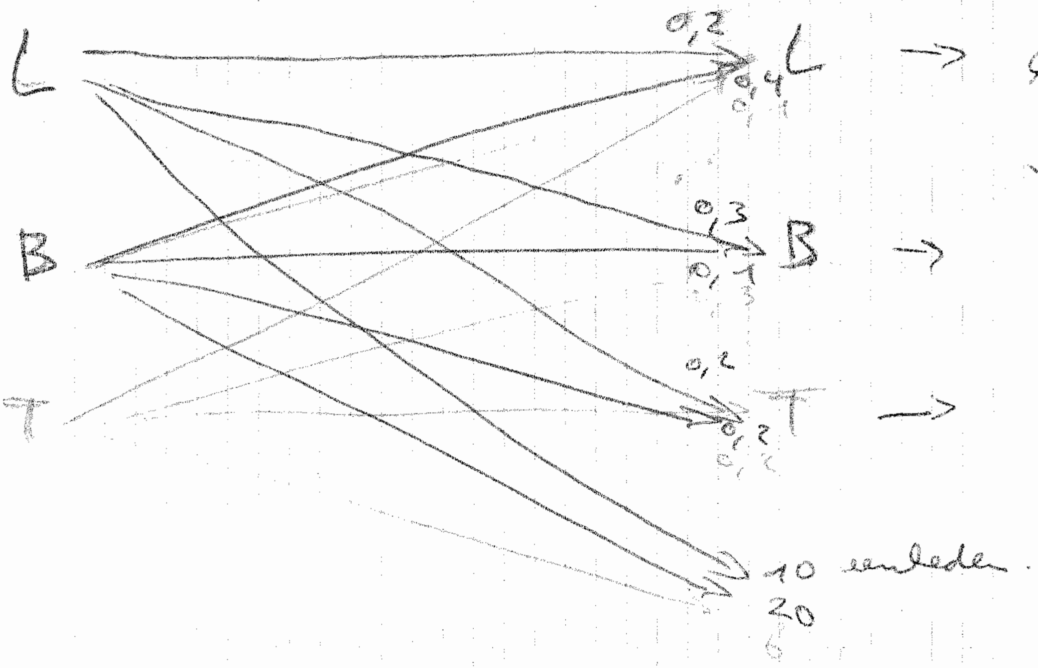
(c)

$$X_{n+1} \begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 645 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1^e \text{ jaar later} : & X_2 = A X_1 \\ 2^e \text{ jaar } \text{''} : & X_3 = A X_2 \\ 3^e \text{ jaar later} : & X_4 = A X_3 \end{array}\right\} \text{ of } X_4 = A^3 X_1$$

we verwachten een populatie van 3081 na 3 jaar.

$\boxed{\text{oef 5}}$



→ hoeveel moet elk produceren zodanig dat systeem in evenwicht is.

$$\begin{pmatrix} X_L \\ X_B \\ X_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ x_B \\ x_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

oplossing

$$x_L = 0,2x_L + 0,3x_B + 0,2x_T + 10$$
$$x_B = 0,4x_L + 0,1x_B + 0,2x_T + 20$$
$$x_T = 0,1x_L + 0,3x_B + 0,2x_T + 6$$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$X_L = [illegible]$