

Monitoraat 2

Vectorruimten en deelruimten

1. Ga het volgende na:
 - (a) Is $\mathbb{C}$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$?
 - (b) Is $\mathbb{R}$ een vectorruimte over $\mathbb{C}$?
2. Zijn volgende verzamelingen deelruimten van de vectorruimte $\mathcal{R}$ van de rijen in $\mathbb{R}$?
 - (a) De verzameling van alle rijen met limiet $+\infty$.
 - (b) De verzameling van alle rijen met een staart van nullen, d.w.z. de rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ waarvoor er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $x_n = 0$ voor alle $n \geq n_0$.

Voortbrengend, lineair (on)afh., basis

3. Toon aan dat de vectoren $(1,2,3)$ en $(4,5,6)$ dezelfde deelruimte van $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$ voortbrengen als de vectoren $(2,1,0)$ en $(1,1,1)$.
4. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ over $\mathbb{R}$.
 - (a) Geef een basis α voor deze vectorruimte en ga na dat α inderdaad voortbrengend en vrij is.
 - (b) Geef de coördinaten van $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$ t.o.v. deze basis α .
5. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}[X]^2$ over $\mathbb{R}$.
 - (a) Toon aan dat $D = \{X^2 - 2X + 5, 2X^2 - 3X, X + 3\}$ een basis is (tip: denk aan propositie 4.3.11).
 - (b) Zij $(-3, 2, 4)$ de coördinaten van een veelterm t t.o.v. de basis D . Hoe ziet die veelterm t er uit? Wat zijn de coördinaten van t t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}[X]^2$?

Lineaire afbeeldingen

6. Beschouw de volgende lineaire afbeelding

$$f : \mathbb{R}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]^3 : a + bX + cX^2 \mapsto c + (a+b)X + (a+c)X^2 + (b+c)X^3$$

Neem de basis D uit oefening 5 voor $\mathbb{R}[X]^2$ en de basis $F = \{1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3\}$ voor $\mathbb{R}[X]^3$.

- (a) Ga thuis na dat f een lineaire afbeelding is.

(b) Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 4 & -8 \\ a_{21} & -3 & 4 \\ a_{31} & 2 & 3 \\ a_{41} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de matrix van f t.o.v. de basis D en F
(met a_{11}, a_{21}, a_{31} en $a_{41} \in \mathbb{R}$).

Bepaal de waarde van a_{11}, a_{21}, a_{31} en a_{41} .

- (c) Beschouw de veelterm t uit oefening 6. Bereken het beeld van t onder f (geef dit beeld weer als een veelterm) op twee manieren:
- Met het functievoorschrift.
 - Via de matrix A , zonder op enige manier gebruik te maken van het functievoorschrift.

Def 1 p425

a) ja nagaan vooroptelling en vermenigvuldiging.

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (v, w) \mapsto v + w.$$

$$a+bi, c+di \mapsto (a+b) + (c+d)i$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (\lambda, v) \mapsto \begin{matrix} \lambda v \\ \lambda(a+bi) \end{matrix} \quad (\text{want } \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$$

b) nee vooroptelling OK!

vermenigvuldigen:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a+bi) \mapsto (a+bi)\lambda$$

$$(v, \lambda) \mapsto \lambda v.$$

↳ blijft int hier moet $\mathbb{C}$ staan

Def 3 p432

a) gr deelvormte. (H = verzamelle rijen met lim + ∞)

$$\text{bv } \forall v, w \in A, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda v + \mu w \notin H$$

$$\text{bv } (-\infty) + (+\infty) \text{ als } \lambda = 0, 1 \text{ en } \mu = 1.$$

b) jaaaaaaammm.

* versc. is int leeg, bv $x_n = \frac{1}{n}$

* zij x_n een rij in $\mathbb{R}$ met $x_n = 0$ voor alle $n \geq n_0$ met $n_0 \in \mathbb{N}$.

zij y_n een rij in $\mathbb{R}$ met $y_n = 0$ voor alle $n \geq n_1$ met $n_1 \in \mathbb{N}$

zij $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dan geldt $(\lambda x_n + \mu y_n) = 0$ voor alle $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$(\text{inderdaad: } \lambda x_n + \mu y_n = \lambda 0 + \mu 0 = 0) \text{ bv } \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x+2}{x^3} \text{ lim} = 0$$

$$\text{Def 3 TB } \{ \lambda(-1, 2, 3) + \mu(4, 5, 6) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \{ s(2, 1, 0) + t(1, 1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$$

B

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = 2s + t \\ 2\lambda + 5\mu = s + t \\ 3\lambda + 6\mu = t \end{cases}$$

(λ en μ zijn gegeven, je verstrekt int eerste deel met gegeven λ en μ , dan kies je s en t zodanig dat ze gelijk zijn

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \lambda & 4\mu & 2s & t & \lambda & 4\mu & 2s & t & \lambda & 4\mu & 2s & t \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda & 4\mu & 2s & t & \lambda & 4\mu & 2s & t & \lambda & 4\mu & 2s & t \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & -2 & 0 & -6 & -6 & -2 & 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}$$

λ, μ etc, dus in rechterleden schrijven.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \lambda + 4\mu \\ 1 & 1 & 2\lambda + 5\mu \\ 0 & 1 & 3\lambda + 6\mu \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\lambda + 5\mu \\ 2 & 1 & \lambda + 4\mu \\ 0 & 1 & 3\lambda + 6\mu \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\lambda + 5\mu \\ 0 & -1 & -3\lambda - 6\mu \\ 0 & 1 & 3\lambda + 6\mu \end{array} \right)$$

$$\boxed{F = 3\lambda + 6\mu}$$

$$\Delta = -3\lambda - 6\mu + 2\lambda + 5\mu$$

$$\boxed{\Delta = -\lambda - \mu}$$

ook controleren in andere richting.

Taak 4 (a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \dots$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← sentje nodig voor elk element v de matrix

$$\text{aantal elementen in basis} = 4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \dim V = 4 \quad (2 \times 2)$$

* cetera voortbrengend, zie deel 1

$$\text{* vrij als } \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\text{enkel als } \alpha, \beta, \rho, \mu = 0$$

⑤ volgende elementen v belang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$$

coördinaten $(1, \pi, \sqrt{2}, 7)$

$$\hookrightarrow \text{is } (a, b, c, d) \text{ als } 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\text{daet bekom je matrix } \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$$

oef. 5 als B een vrij deel is, dan

met propositie 4.3.11

② aantoonend dat $\# B = \dim \mathbb{R}[x]^2$

③ is het vrij deel?

$$\text{als } \alpha(x^2 - 2x + 5) + \beta(2x^2 - 3x) + \delta(x + 3) = 0$$

$$= 0x^2 + 0x + 0$$

2 veeltermen zijn gelijk als

de coëff. bij overeenkomstige $x^2, x, 0$ gelijk zijn

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ -2\alpha - 3\beta + \delta = 0 \\ 5\alpha - 3\delta = 0 \end{cases}$$

als dit stelsel alleen de nuloplossing geeft
dan vrij

③ $\# B = 3$

$\dim \mathbb{R}[x]^2 = 3$

uit ③ en ④ volgt $\Rightarrow$ een basis.

⑤ standaardbasis in $\mathbb{R}[x]^2$ is $\{1, x, x^2\}$

$$-3(x^2 - 2x + 5) + 2(2x^2 - 3x) + 4(x + 3) = +$$

$$-3x^2 + 6x - 15 + 4x^2 - 6x + 4x + 12 = +$$

$$x^2 + 4x - 3 = +$$

$(-3, 4, 1)$ zijn coördinaten v.t.o.v. de standaardbas.

oef 6

①

$$L: V \rightarrow W \xrightarrow{\text{basis } \{w_1, \dots, w_n\} = \beta} \text{basis } \{v_1, \dots, v_n\} = \alpha$$

matrix van L t.o.v. α en β

$$A = \begin{pmatrix} \text{coörd. van } L(v_1) & \text{coörd. van } L(v_2) & \dots & \text{coörd. van } L(v_n) \\ \text{t.o.v. } \beta & \text{t.o.v. } \beta & \dots & \text{t.o.v. } \beta \end{pmatrix}$$

zij $v \in V$ (als je vector v hebt kan je uit direct $L(v)$ weten, welke coördinaten)

$$A \cdot \begin{pmatrix} \text{coörd. van } v \\ \text{t.o.v. } \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coörd. van } L(v) \\ \text{t.o.v. } \beta \end{pmatrix}$$

$$f: \underset{D}{\mathbb{R}[x]^2} \rightarrow \underset{F}{\mathbb{R}[x]^3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{word} \\ \text{from} \\ f(x^2 - 2x + 5) \\ \text{F.O.U.F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$