Monitoraat 3

Differentievergelijkingen

1. Opdracht 6 (c) (g) p486, 1 (g) p485, extra:
   Vind de algemene oplossing van de volgende differentievergelijkingen:
   (a) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 4$
   (b) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = n^3 + 1$
   (c) $y_{n+1} - e^{2n}y_n = 0$
   (d) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3^n + 5n$

2. Opdracht 3 p486:
   Iemand leent 75 000 euro aan een jaarlijkse intrest van 8% die maandelijks wordt samengesteld. Op het einde van elke maand lost hij een vast bedrag A van zijn lening af.
   (a) Schrijf een differentievergelijking voor de rij $(y_n)_n$ die de uitstaande schuld *maand na maand* beschrijft, d.w.z. y_n = bedrag dat zou moeten betaald worden aan het eind van maand n om de lening volledig af te betalen.
   (b) Los die vergelijking expliciet op.
   (c) Bepaal dan A zo dat $y_{240} = 0$, d.w.z. de lening is afbetaald na 20 jaar.

Lineaire programmering

3. Opdracht 5 p504:
   Een marktkramer verkoopt 2 soorten sokken: witte en gekleurde. Je kan bij hem een koopje doen door de sokken per pakket te kopen: ofwel neem je een pakket bestaande uit 4 paar witte en 2 paar gekleurde sokken. Hiervoor betaal je 15 euro. Ofwel neem je een pakket met 8 paar witte en 2 paar gekleurde sokken. Dit kost je 20 euro. Op een dag beschikt de marktkramer over 24 paar gekleurde en 84 paar witte sokken. Hoeveel pakketten van elke soort moet hij samenstellen om een maximale opbrengst te verkrijgen?

Meetkunde - Huistaak

4. Opdracht 7 p508:
   Stel de cartesiaanse vergelijking op van de rechte, in $\mathbb{R}^3$, door de punten $v_1 = (3, 2, -3)$ en $v_2 = (1, 5, 0)$.
   Als $p = (8, 0, 4)$, wat is dan de afstand van p tot die rechte ?
   (tip: maak een schets)

MONITORAAT 3

oef 1 ⓐ <u>homogeen</u>

oplossingen v/d vorm $y_n = \lambda^n$ met λ cte.

$$\lambda^{n+2} - 2\lambda^{n+1} + 4\lambda^n = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$
$$D = -12$$

$$\lambda_1 = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} \quad \vee \quad \lambda_2 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$$
$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}\, i \quad \vee \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$$
$$\Longleftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \vee \Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_n^{(1)} = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} + i \sin n\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y_n^{(2)} = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} - i \sin n\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\tilde{y}_n^{(1)} = \frac{y_n^{(1)} + y_n^{(2)}}{2} = 2^n \cos n\frac{\pi}{3}$$

$$\tilde{y}_n^{(2)} = \frac{y_n^{(1)} + y_n^{(2)}}{2i} = 2^n \sin n\frac{\pi}{3}$$

opl. hom. vgl: $y_n = A\, 2^n \cos n\frac{\pi}{3} + B\, 2^n \sin n\frac{\pi}{3}$

ⓑ <u>nt homogeen</u>

part. opl v/d vorm $y_{p,n} = \alpha$.

invullen levert. $\alpha - 2\alpha + 4\alpha = 4$

$$3\alpha = 4$$
$$\alpha = \frac{4}{3} \longrightarrow y_{p,n} = \frac{4}{3}$$

algemene opl: $y_n = A\, 2^n \cos n\frac{\pi}{3} + B\, 2^n \sin n\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}$

(b) homogeen

opl v/d vorm $\lambda^n = y_n$ met λ cte.
invullen levert karakteristieke vgl.

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$$
$$D = 16 \qquad \lambda_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

opl homogeen $y_n = A \cdot 1 + B(-3)^n$

niet homogeen

part. opl v/d vorm $y_n = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$
invullen levert.

$$\alpha(n+2)^3 + \beta(n+2)^2 + \gamma(n+2) + \delta + 2\alpha(n+1)^3 + 2\beta(n+1)^2 + 2\gamma(n+1) + 2\delta$$
$$- 3\alpha n^3 - 3\beta n^2 - 3\gamma n - 3\delta = n^3 + 1.$$

$$\alpha n^3 + 6\alpha n^2 + 12\alpha n + 8\alpha + \beta n^2 + 4\beta n + 4\beta + \gamma n + 2\gamma + \delta$$
$$+ 2\alpha n^3 + 6\alpha n^2 + 6\alpha n + 2\alpha + 2\beta n^2 + 4\beta n + 2\beta + 2\gamma n + 2\gamma + 2\delta$$
$$-3\alpha n^3 - 3\beta n^2 - 3\gamma n - 3\delta = n^3 + 1.$$

$$\begin{cases} \alpha n^3 + 2\alpha n^3 - 3\alpha n^3 = 1 \end{cases} \quad \text{strijdig.}$$

2^e voorstel : opl v/d vorm $y_{p,n} = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n.$

$$\alpha(n+2)^4 + \beta(n+2)^3 + \gamma(n+2)^2 + \delta(n+2) + 2\alpha(n+1)^4 + 2\beta(n+1)^3 + 2\gamma(n+1)^2 + 2\delta$$
$$- 3\alpha n^4 - 3\beta n^3 - 3\gamma n^2 - 3\delta n = n^3 + 1$$

(c)

van orde 1, dus 1 oplossingnodig
alle andere opl. zijn veelvoud.
neem bv beginvoorwaarde $y_0 = 1$.

$$y_n = e^{2(n-1)} y_{n-1} = e^{2(n-1)} \cdot e^{2(n-2)} \cdot y_{n-2} = e^{2(n-1)} \cdot e^{2(n-2)} \cdot e^{2(n-3)} y_{n-3}$$
$$= e^{2((n-1)+(n-2)+\dots+1)} \underbrace{y_0}_{=1}$$

$1 + 2 + 3 + \dots + n$

telkens buitenste termen nemen
$(n+1) + (n-1+2) \dots$
$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots}_{\frac{n}{2} \text{ termen dus}}$

$$= e^{2((n-1)\frac{n}{2})}$$
$$= e^{(n-1)n}$$

algemene opl $y_n = A e^{(n-1)n}$

ⓐ <u>homogeen</u>

opl v/d vorm $\lambda^n = y_n$ met λ cte

invullen levert karakteristieke vgl.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$D = 0$ $\qquad \lambda_1 = \frac{4}{2} = 2$

$\lambda_2 = 2n$

dan opl. homogeen $y_n = A\,2^n + nB\,2^n$

<u>niet homogeen</u>

opl v/d vorm $y_{p,n} = \alpha\, 3^n + \beta n + \gamma$

invullen levert.

$\boxed{\text{oef 2}}$ $y_{n+1} = \left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right) y_n - A$.

beginvoorwaarde $y_0 = 75\ 000$

i)

$y_1 = y_0 \frac{151}{150} - A = 75\,000 \cdot \frac{151}{150} - A$

$y_2 = y_1 \cdot \frac{151}{150} - A = 75\,000 \cdot \frac{151}{150} \cdot \frac{151}{150} - \frac{A \cdot 151}{150} - A$.