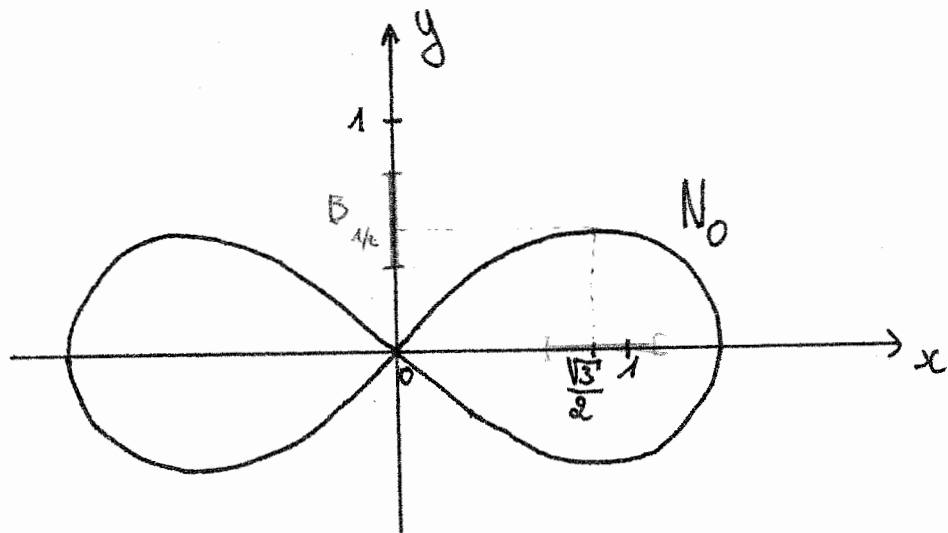


Monitoraat 4

Impliciet gedefinieerde reële functies

1. Zij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$.
Beschouw $N_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$.
- (a) Ga na dat het punt $p_1 = (0, 0)$ en $p_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ behoren tot N_0 .
 - (b) Zijn de voorwaarden van de impliciete-functiestelling die garanderen dat je y kan beschouwen als een unieke functie van x impliciet gedefinieerd door $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ in een open interval rond $x = 0$ (resp. rond $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$) voldaan?
 - (c) Ga op onderstaande tekening na of je zo'n unieke functies beschreven in (b) kan vinden.



- (d) Indien het antwoord in (b) 'ja' is, bereken dan de afgeleide in het desbetreffende punt. Als het antwoord in (b) 'nee' is en je probeert toch de afgeleide te berekenen, wat vind je dan?
2. Beschouw een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orden. We weten dat f voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voldoet aan de volgende vergelijking:
- $$3 \cos^2 x f(x, y) - y^2 e^{2x} + 2f(x, y)^3 - 3 \sin(\frac{\pi}{2} y) f(x, y) = 15.$$
- Bereken $D_1 f(0, 1)$, $D_2 f(0, 1)$ en $D_{12}^2 f(0, 1)$.

Impliciet gedefinieerde vectorfuncties

3. Oef. 6 p 565:

Beschouw voor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ volgend stelsel voor y_1 en y_2 :

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 3x_1 \\ y_1 - y_2^3 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat dit stelsel een unieke (reële) oplossing heeft als $(x_1, x_2) = (2, 1)$.
- (b) Toon aan dat er een open $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bestaat met $(2, 1) \in A$ zodat het stelsel voor alle $(x_1, x_2) \in A$ een unieke (reële) oplossing heeft.
Gebruik hiervoor de algemene impliciete functiestelling.
(Wat is hier de functie F en het punt c die het stelsel beschrijven?
Wat is (x^*, y^*) ?
Welke voorwaarden moeten nagegaan worden om de stelling te kunnen gebruiken?)
- (c) Uit het vorige volgt dat we via het stelsel y_1 en y_2 kunnen beschouwen als (impliciet gedefinieerde) functies van $(x_1, x_2) \in A$.
Bereken alle partiële afgeleiden van eerste orde van y_1 en y_2 in $(2, 1)$.
Doe dit op twee manieren:
 - (i) Gebruik de algemene impliciete functiestelling.
 - (ii) Leid de twee vergelijkingen af en houd er rekening mee dat de afgeleide van een constante functie nul is.
- (d) Bereken $D_{12}^2 y_1(2, 1)$.

Monitoraat 4

73 ② $F(0,0) = (0^2 + 0^2)^2 - 2(0^2 - 0^2)$
 $= 0$ dus $p_1 \in N_0$

$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}$
 $= 0$ dus $p_2 \in N_0$.

③ $F = c$ nodig

1 $F(x,y) = c \iff$ vergelijking (dus $\neq$ gedefinieerde c vinden)

2 $F(x^*, y^*) = c$

(x^*, y^*) die aan vgl voldoet.

3 $\frac{dF}{dy}(x^*, y^*) \neq 0$
 $\frac{cis}{\neq}$

als verschillend v met dan kan je stelling toepassen.

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

$f \rightarrow$ unieke functie v x gedefinieerd door geg. vgl.

3 $\frac{dF}{dy} = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 4y$

dan is $\frac{dF}{dy}(0,0) = 0$

omdat $x=0$ niet voldoet.
je kan stelling dus niet toepassen.

$\frac{dF}{dy}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4 \neq 0$

omdat $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ wel voldoet.

dus $\exists$ unieke $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = y$
met $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$ en $\frac{1}{2} \in B$.

met $\forall x \in A : F(x; f(x)) = 0$

④ $F(x, f(x)) := (x^2 + f^2(x))^2 - 2(x^2 - f^2(x))$

dan is $\frac{dF}{dx} = 2(x^2 + f^2(x))(2x + 2f(x) \cdot f'(x)) - 4x + 4f(x) \cdot f'(x)$

$\parallel$

$0 = 2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)(\sqrt{3} + 1 \cdot f'(x)) - 2\sqrt{3} + 2 \cdot f'(x)$

$= 2\sqrt{3} + 2f'(x) - 2\sqrt{3} + 2f'(x)$

$= 4f'(x)$

$0 = f'(x)$

als je $(0,0)$ invult valt alles weg.

$0 = \frac{dF}{dx}(0,0) = 0$ dus je kunt $f'(x)$ niet bepalen.

y in funktion von x

$$\frac{dF}{dx} = 6 \cos x \cdot (-\sin x) f(x, y) + 3 \cos^2 x \cdot D_1 f(x, y) - y^2 e^{2x} \cdot 2 + 2 \cdot 3 f(x, y)^2 \cdot D_1 f(x, y) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) D_1 f(x, y) = 0$$

$$x=0, y=1 \Leftrightarrow 3 D_1 f(x, y) - 2 + 6 f(x, y)^2 \cdot D_1 f(x, y) - 3 D_1 f(x, y) = 0$$

$$\text{erst } f(0, 1) : \quad \cancel{3 f(0, 1)} - 1 + 2 f(0, 1)^3 - 3 \cancel{f(0, 1)} = 15$$

$$f(0, 1)^3 = 8$$

$$f(0, 1) = 2$$

damit $D_1 f(0, 1)$ berechnen.

$$\cancel{3 D_1 f(x, y) - 2} + 24 D_1 f(x, y) - 3 \cancel{D_1 f(x, y)} = 0$$

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{12}$$

$$\frac{dF}{dy} = 3 \cos^2 x \cdot D_2 f(x, y) - 2 y e^{2x} + 6 f(x, y)^2 \cdot D_2 f(x, y) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f(x, y) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot D_2 f(x, y) = 0$$

$$x=0, y=1 \quad \cancel{3 D_2 f(x, y) - 2} + 24 D_2 f(x, y) - 3 \cancel{D_2 f(x, y)} = 0$$

$$D_2 f(x, y) = \frac{1}{12}$$

$$= 6 \cos x (-\sin x) D_2 f(x, y) + 3 \cos^2 x \cdot D_{12} f(x, y) - 2 y e^{2x} \cdot 2 + 12 f(x, y) \cdot D_2 f(x, y) \cdot D_1 f(x, y) + 6 f(x, y)^2 \cdot D_{22} f(x, y) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot D_1 f(x, y) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) D_{12} f(x, y) = 0$$

$$x=0, y=1$$

$$0 = \cancel{3 D_{12} f(x, y)} - 4 + 24 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + 24 \cdot D_{22} f(x, y) - 3 \cancel{D_{12} f(x, y)}$$

$$24 D_{22} f(x, y) = 4 - \frac{24}{144}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{144}$$

$$= \frac{24}{144} - \frac{1}{144} = \frac{23}{144}$$

oef 3 oef 6 p 565

a) met $(y_1, y_2) = (2, 1)$ $\begin{cases} y_1 - y_2 = 6 \\ y_1 - y_2^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 + y_2 \\ 6 + y_2 - y_2^3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 6 + y_2 \end{cases}$

$6 + y_2 - y_2^3 = 0$

$y_2 = 2 \rightarrow$ delers v 6 proberen

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & & -2 & -4 & -6 \\ \hline & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (y_2 - 2) (-y_2^2 - 2y_2 - 3) = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 3 < 0 \rightarrow$ geen andere reële yel

daar $\begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

b) $\rightarrow$ zij $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m: (x, y) \mapsto F(x, y)$

een functie waarvan componentfuncties ont. part. afgeleiden hebben.

zij $c \in \mathbb{R}^m$ $F(x, y) = c$

$\rightarrow$ zij $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ een punt waarvoor $F(x^*, y^*) = c$

$\hookrightarrow$ punt dat aan stelsel voldoet.

$\rightarrow$ stel dat $dy F(x^*, y^*)$ inverteerbaar is, dan bestaat er een unieke functie

$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m: x \mapsto f(x)$

y^* is unieke functie v x (via $F(x, y) = c$)

OF voor x in A heeft het stelsel een unieke yel y .

Jacobiaan.

eerst $F, c, (x^*, y^*)$ zoeken.

$\hookrightarrow$ de vector.

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto F(x_1, x_2, y_1, y_2)$

$\hookrightarrow$ 2 componentfuncties.
= aantal yel.

$x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 - 3x_1 \\ y_1 - y_2^3 - x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jacobiaan $\left\{ \begin{array}{l} dy F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = -1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 4$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = -3y_2^2$$

$$dy F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$dy F(2, 1, 8, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

dit is inverteerbaar want $\det \neq 0$. dus $\exists$ een $A \subseteq \mathbb{R}^2$ met $(3, 1) \in A$
 $\exists$ unieke $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$ $(x_1, y_2) \mapsto f(x_1, y_2)$ y_1, y_2 zijn
 $\downarrow$ functies v/d x_1, x_2
 (y_1, y_2) functie v/d x_1, x_2

$$df(x) = -(dy F(x, f(x)))^{-1} \cdot dx F(x, f(x))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_1}{dx_2} \\ \frac{dy_2}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

1e rij 1 component

$$= - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -3 \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -1 \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 2$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{35}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -0 & 12 & -1 \\ 0 & -12 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 35 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$