Monitoraat 5 : Gebonden extrema

Methode voor het vinden van gebonden extrema:

Probleem:
Vind de extrema van een functie f van n veranderlijken onder m randvoorwaarden.
Oplossingsmethode:
(1) Bereken de kritieke punten van de Lagrangefunctie L.
(2) Bereken voor $k = n - m, \ldots, 2, 1$:
Δ_k = determinant van de matrix verkregen door in de Hessiaan van L in het kritiek punt de eerste $k - 1$ rijen en kolommen te schrappen.
Als voor alle $k = n - m, \ldots, 1$ het teken van Δ_k gelijk is aan het teken van $(-1)^m$, dan bereikt f een gebonden lokaal *minimum* in het kritiek punt.
Als de tekens van $\Delta_{n-m}, \Delta_{n-m-1}, \ldots, \Delta_1$ alterneren te beginnen met het teken van $(-1)^{m+1}$, dan bereikt f een gebonden lokaal *maximum* in het kritieke punt.

Oefeningen:

1. Oef. 7 (b) en (c) p616:
   Een bedrijf wil twee nieuwe producten lanceren.
   Wanneer $R_1 \times 100$ euro besteed wordt aan research voor product 1, en $P_1 \times 100$ euro aan promotie voor product 1, zullen er $\dfrac{160R_1}{160 + R_1} + \dfrac{320P_1}{80 + P_1}$ van deze producten verkocht worden. Dit product wordt gefabriceerd aan 200 euro per stuk, en verkocht aan 600 euro per stuk.
   Wanneer $R_2 \times 100$ euro besteed wordt aan research voor product 2, en $P_2 \times 100$ euro aan promotie voor product 2, zullen er $\dfrac{40R_2}{40 + R_2} + \dfrac{120P_2}{30 + P_2}$ van deze producten verkocht worden. Dit product wordt gefabriceerd aan 900 euro per stuk, en verkocht aan 1800 euro per stuk.
   (a) Veronderstel nu dat het bedrijf voor research en promotie samen 48 000 euro wil besteden. Hoe moeten deze beschikbare middelen verdeeld worden over research en promotie voor beide producten om een maximale winst te realiseren? Hoeveel is die maximale winst?
   Opl.: $R_1 = 5120/47, P_1 = 8880/47, R_2 = 2860/47, P_2 = 5700/47, \lambda = 2595/6241, W = 176153.31$ euro
   (b) Gebruik de waarde van de Lagrangemultiplicator in (a) om te schatten hoeveel de maximaal haalbare winst zou zijn als er 48 100 euro beschikbaar zou zijn voor research en promotie.

Oef. voor thuis: vergelijk deze schatting met de werkelijk haalbare winst. *Opl.:* schatting 176194.89 euro, werkelijke winst 176194.71 euro

2. Oef. 10 (b) p618
   Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een overal gedefinieerde functie met continue partiële afgeleiden minstens tot de tweede orde. Veronderstel dat $f'(0) > 0$. Beschouw nu de functie $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $h(x, y, z) = f(xy + z^2)$.
   Toon aan dat h in $(0, 0, 0)$ een lokaal gebonden minimum bereikt onder de randvoorwaarde dat $xe^y - y\cos x = 0$.
   Doe dit door de randvoorwaarde impliciet te substitueren in de doelfunctie (beschouw bv. y als een functie van x indien dit mogelijk is) en zo het probleem te herleiden tot een extremaliseringsprobleem met 2 variabelen zonder randvoorwaarde.

3. Je hebt bij een wedstrijd een bon van 100 euro gewonnen voor een winkel waar je CD's, boeken en strips kan vinden. Deze winkel gaat er prat op alle strips aan 5 euro, alle boeken aan 10 euro en alle CD's aan 15 euro te verkopen.
   De winkel werkt met klantenkaarten. Een klantenkaart is vol als je 10 artikels gekocht hebt. Bij een volle kaart krijg je een absolute korting bij de volgende aankoop. Het bedrag van deze korting hangt af van het aantal exemplaren die je van de verschillende artikels gekocht hebt en wordt op de volgende manier berekend.
   20% van het produkt van het aantal CD's en het aantal boeken, 10 % van het produkt van het aantal CD's en het aantal strips en 10 % van het produkt van het aantal boeken en het aantal strips.
   (a) Het is de laatste dag dat de bon geldig is en je wilt hem dus volledig gebruiken. Je wilt zelf niets bijleggen. Hoeveel CD's, boeken en strips moet je dan kopen om juist een volle klantenkaart te hebben en een zo groot mogelijke korting bij een volgende aankoop?
   (gebruik de methode van Lagrange)
   Hoeveel bedraagt deze korting dan ?
   (b) Je bent niet tevreden met deze korting en je zoekt een manier om een hogere korting te bekomen. Je vriend stelt voor dat je 10 euro bijlegt zodat je voor 110 euro kan kopen. Zelf denk je een beter idee te hebben: aan de zaakvoerder voorstellen om een klantenkaart pas vol te verklaren als er 11 artikels op staan en nog steeds voor 100 euro produkten te kopen. Welk van de twee strategieën levert de grootste korting op ?
   Los dit probleem op door een schatting te maken van de nieuwe korting aan de hand van de multiplicatoren van Lagrange.

$\boxed{\text{Mentoraat 5}}$

$\boxed{\text{Vf 1}}$

functie $W = 600 \cdot \left(\frac{160 R_1}{160 + R_1} + \frac{320 P_1}{80 + P_1} \right) + 1800 \left(\frac{40 R_2}{40 + R_2} + \frac{120 P_2}{30 + P_2} \right)$

$-200 \left(\text{———} \right) + 900 \left(\text{——} \right) - 100 P_1 - 100 R_1$

$- 100 R_2 - 100 P_2$

RVW $100 (P_1 + R_1 + P_2 + R_2) = 48\,000$ → het minimale moet dan ook andere $P_1 \dots P_2$ substitueren

Lagrangefunctie is dan

$L : \mathbb{R}^{4+1} \to \mathbb{R} : (R_1, P_1, R_2, P_2, \lambda) \mapsto 400 \left(\frac{160 R_1}{160 + R_1} + \frac{320 P_1}{80 + P_1} \right) + 900 \left(\frac{40 R_2}{40 + R_2} + \frac{120 P_2}{30 + P_2} \right)$

$- 100 P_1 - 100 R_1 - 100 R_2 - 100 P_2$

$- \lambda (P_1 + R_1 + R_2 + P_2 - 480)$

$D_1 L = \frac{64\,000 (160 + R_1) - 64\,000 R_1}{(160 + R_1)^2} - 100 - \lambda = 0$

$D_2 L = \frac{128\,000 (80 + P_1) - 128\,000 P_1}{(80 + P_1)^2} - 100 - \lambda = 0$

$D_3 L = \frac{36\,000 (40 + R_2) - 36000 R_2}{(40 + R_2)^2} - 100 - \lambda = 0$

$D_4 L = \frac{108\,000 (30 + P_2) - 108\,000 P_2}{(30 + P_2)^2} - 100 - \lambda = 0$

$D_5 L = -(P_1 + R_1 + R_2 + P_2 - 480) = 0$

dus ($D_1 L = D_2 L$) $\frac{64\,000 (160 + R_1) - 64\,000 R_1}{(160 + R_1)^2} = \frac{128\,000 (80 + P_1) - 128\,000 P_1}{(80 + P_1)^2}$

$\frac{10240\,0000}{(160 + R_1)^2} = \frac{10\,240\,000}{(80 + P_1)^2}$

$160 + R_1 = 80 + P_1$

$\boxed{80 + R_1 = P_1}$

$(D_1 L = D_3 L)$ $\qquad \dfrac{10\,240\,000}{(160+R_1)^2} = \dfrac{1\,440\,000}{(40+R_2)^2}$

$$\dfrac{3200}{1200} = \dfrac{160+R_1}{40+R_2}$$

$$\frac{8}{3}(40+R_2) = 160+R_1$$

$$320+8R_2 = 480+3R_1$$

$$\boxed{R_2 = 20+\frac{3}{8}R_1}$$

$(D_1 L = D_4 L)$ $\qquad \dfrac{10\,240\,000}{(160+R_1)^2} = \dfrac{3\,240\,000}{(30+P_2)^2}$

$$\frac{3200}{1800}(30+P_2) = 160+R_1$$

$$\frac{480}{9}+\frac{16}{9}P_2 = 160+R_1$$

$$P_2 = \frac{960}{16}+\frac{9}{16}R_1$$

$$\boxed{P_2 = 60+\frac{9}{16}R_1}$$

invullen levert $\quad 80+R_1+R_1+20+\frac{3}{8}R_1+60+\frac{9}{16}R_1-480=0$

$$\Leftrightarrow \quad 2R_1+\frac{3}{8}R_1+\frac{9}{16}R_1 = 320$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 = \frac{5\,120}{47}$$

dan is $R_2 = \dfrac{2\,860}{47}$; $P_2 = \dfrac{5700}{47}$; $P_1 = \dfrac{8\,830}{47}$

$$\lambda = \frac{2\,595}{6\,241}.$$

λ ook berekenen: want stelling zegt dat er een λ moet bestaan.
dan $W = 176\,153{,}31$ euro

<u>maximum?</u>
daarvoor Hessiaan berekenen.
dan determinanten berekenen.
aantal : 3 $\qquad (n-m = 4-1=3)$

$D^2_{11}L = -2(10240000) \cdot (160+P_1)^{-3} \quad < 0$

$D^2_{22}L = -2(10240000) \cdot (80+P_1)^{-3} \quad < 0$

$D^2_{33}L = -2(1440000) \cdot (40+P_2)^{-3} \quad < 0$

$D^2_{44}L = -2(3240000) \quad (30+P_2)^{-3} \quad < 0$

$D^2_{55}L = 0$

$D^2_{15} = D^2_{25} = D^2_{35} = D^2_{45} = -1$

$D^2_{51} = D^2_{52} = D^2_{53} = D^2_{54} = -1$

$$H_L(a) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta 3 = b_3(-1) - 1(+b_4)$

$= -b_3 - b_4 > 0$

$\Delta 2 = b_2 \cdot (\underbrace{-b_3 - b_4}) - 1 \cdot b_3 (b_4)$

$= b_2 \cdot \quad < 0$

$= < 0$

$\Delta_1 = b_1 \ \Delta 2 - b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 > 0$

$(-1)^{1+1} \quad > 0$ dus maximum.

(b) nieuwe winst schatting.

oorspronkelijke winst $+ 100\lambda = 176153{,}31 + 41{,}579$

---

oef 2 y schrijven als functie v x ?? (randvoorwaarde)

stel $G(x,y) = xe^y - y\cos x$

$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = xe^y - \cos x = -1 \neq 0$ dus er bestaat er een functie

$H: A \to \mathbb{R}: x \mapsto H(x)$ $\quad H(x^*, y^*)$

met $0 \in A$ en $H(0) = 0$ en voor

alle $x \in A$: $xe^{H(x)} - H(x)\cos x = 0$

Beschouw nu

$S: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (x,z) \mapsto h(x, H(x), z) = f(x, H(x) + z^2)$

nu aantonen dat S zijn minimum bereikt in $(0,0)$

dan bereikt h gelonde minimum in $(0,0,0)$

$D_1 S = \frac{\partial S}{\partial x}(0,0) = f'(x \cdot t(x) + z^2) \cdot (x \cdot t'(x) + t(x)) = 0$

$= 0$

$D_2 S = \frac{\partial S}{\partial z} = f'(x \cdot t(x) + z^2) \cdot 2z$

$= 0$

$\Rightarrow$ dus kritiek punt

$D^2_{11} S = f''(x \cdot t(x) + z^2) \, (x \cdot t'(x) + t(x))^2 + f'(x \cdot t(x) + z^2) \cdot (t'(x) + x t''(x) + t'(x)$

bekom je door t af te leiden.

$t'(x) = e^{t(x)} + x\, e^{t(x)} \cdot t'(x) - (t'(x) \cdot \cos x + t(x) \cdot \sin x)$

$t'(0) = 1 - t'(0)$

$0 = 1 - t'(0) \Rightarrow t'(0) = 1.$

$\boxed{\text{oef } 3}$ (a) opl 3 cd's
4 boeken
3 strips

(b) tweede.