OEFENZITTINGEN HOGERE WISKUNDE II

1e Bachelor Handelsingenieur

Oefenzitting 1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Oefeningen

1. Los de volgende stelsels op :

$$\text{(a)}\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3y+x+z=7 \\ -4z+2x+3y=5 \\ 2x+y-8z=-1 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\begin{cases} x+2y-3z+2t=2 \\ 2x+5y-8z+6t=5 \\ 3x+4y-5z+2t=4 \end{cases}$$

2. (a) Bespreek de oplossingsverzameling van onderstaand stelsel in functie van de parameter $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

   (b) Wat gebeurt er als we de rechterleden van de vergelijkingen allemaal gelijk stellen aan nog een andere parameter $b \in \mathbb{R}$?

3. Voor het berekenen van de premies houdt een autoverzekeringsmaatschappij rekening met het vermogen van de wagen, de bonus-malus-graad en de leeftijd van de chauffeur en het jaarlijks afgelegd aantal kilometer. Voor elk van deze aspecten wordt een bepaald basisbedrag aangerekend dat dan vermenigvuldigd wordt met een zekere risicofactor naargelang de risicogroep waarin de verzekerde zich voor het betreffende aspect bevindt. De maatschappij onderscheidt per aspect volgende categorieën met bijhorende risicofactor (RF):

leeftijd	RF
18 – 25j.	4
26 – 35j.	2
36 – 60j.	1
60+	3

bon.-mal.	RF
2	1
3 – 5	2
6 – 8	3
9 – 11	4

vermogen	RF
<60 kW	1
60–100 kW	2
>100 kW	3

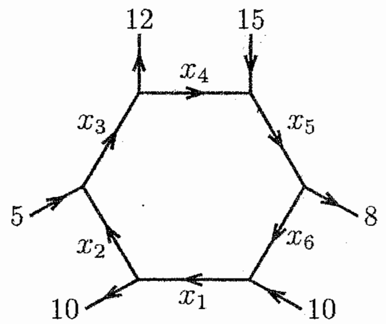
km/jaar	RF
<5000	1
5000–20000	2
>20000	3

De totale premie is dan de som van de bedragen die moeten betaald worden voor deze 4 aspecten afzonderlijk.
Ann wil bij deze maatschappij een autoverzekering afsluiten. Ze is 36 jaar, rijdt 10000 km per jaar en heeft een bonus-malus-graad 8. Haar wagen heeft een vermogen van 76 kW. Ze kent 4 mensen die bij dezelfde maatschappij verzekerd zijn. De gegevens over deze mensen zijn in volgende tabel samengevat.

	leeftijd	bon.-mal.	vermogen	km/jaar	premie
Tania	25j.	2	73 kW	4000	420
Bart	29j.	4	81 kW	4500	460
Nicole	42j.	6	48 kW	21500	540
Paul	63j.	9	105 kW	17000	800

Hoeveel zal de premie van Ann bedragen?

4. Op het terrein van een petrochemisch bedrijf moet er een bepaalde soort vloeistof circuleren tussen de verschillende zones van het bedrijf via een systeem van buizen. Hiernaast zie je het schema van een onderdeel van dat buizensysteem. De pijlen geven de stroomrichting aan. De getallen en de grootheden x_i $(i = 1, \ldots, 6)$ geven het debiet (in m^3 per uur) van de vloeistof in de verschillende buizen.



- Stel het stelsel op waaraan x_1, x_2, $\ldots$, x_6 moeten voldoen.
- Geef de algemene oplossing van dit stelsel.
- Wat is de minimale capaciteit (in m^3 per uur) die de buis die hoort bij x_6 moet hebben, m.a.w. wat is de minimaal toegelaten waarde van x_6?

EINDUITKOMSTEN

1. (a) strijdig stelsel
   (b) oneindig veel oplossingen : $\{(-2 + 5t, 3 - 2t, t) | t \in \mathbb{R}\}$
   (c) oneindig veel oplossingen : $\{(-\lambda + 2\mu, 1 + 2\lambda - 2\mu, \lambda, \mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
2. (a)
   - $a = 1$: oneindig veel oplossingen ($x = 1 - y - z$ met $y, z \in \mathbb{R}$ willekeurig)
   - $a = -2$: strijdig stelsel
   - $a \notin \{1, -2\}$: unieke oplossing namelijk $x = y = z = \frac{1}{a+2}$
3. De premie van Ann bedraagt 580 euro.
4. De minimaal toegelaten waarde van x_6 is 7 m^3 per uur.

$\boxed{\text{Oefeningen}}$ → christophe : Celestijnenlaan 200B

B. 02 04

christophe@wis.kuleuven.ac.be

$\boxed{\text{oef 1}}$ ⓐ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

STRIJDIG

ⓑ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_4 \to \frac{R_4}{-3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2,\ R_4 \to R_4 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{stel } z = t \qquad \begin{aligned} y &= 3 - 2t \\ x &= 4 + t - 6 + 4t \\ &= -2 + 5t \end{aligned}$$

ⓒ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ y - 2z + 2t &= 1 \end{aligned}$$

stel $t = \mu$, $z = \lambda$

dan $y = 2\lambda - 2\mu + 1$

$x = -4\lambda + 4\mu - 2 + 3\lambda - 2\mu + 2$

$= -\lambda + 2\mu$

$z = \lambda$

$t = \mu$

$\boxed{\text{oef } 2}$ ⓐ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - aR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-1+a}]{R_3 \to \frac{R_3}{1-a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \end{array}\right)$$

als $2+a = 0$ dan strijdig stelsel
want dan laatste rij $0 \; 0 \; 0 \; 0$

als $a = 1$ $\to$ oneindig veel oplossingen.

dan is stelsel $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

als $a \neq 1$ en $a \neq -2$

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ y - z = 0 \\ (2+a)z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \frac{1}{2+a} + \frac{a}{2+a} = 1 \\ y = z \\ z = \frac{1}{2+a} \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2+a} - \frac{a}{2+a} - \frac{2+a}{2+a}$$

$$z = y = x = \frac{1}{2+a}$$

ⓑ als $a = 1$ dan $x = b - y - z$
als $a \notin \{1, -2\}$ $x = y = z = \frac{b}{a+2}$ voor als $a = -2$
speciaal geval.

$\boxed{\text{oef } 3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 & 420 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 460 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 460 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 420 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 800 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -620 \\ 0 & -11 & -2 & -11 & -1740 \\ 0 & -5 & 0 & -7 & -820 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_2 \to \frac{R_2}{-4} \\ R_3 \to \frac{R_3}{-11} \\ R_4 \to \frac{R_4}{-5} \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 155 \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & 1 & \frac{1740}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & 164 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 155 \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{4} & \frac{35}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_3 \to \frac{R_3}{2/11} \\ R_4 \to \frac{R_4}{3/20} \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 155 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{8} & 17{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

$x = 240 - 100 - 180 + 340$
$= 20$

$$\begin{cases} x + 3y + z + 3t = 240 \\ y + \frac{5}{4}t = 155 \\ z - \frac{11}{8}t = 17{,}5 \\ t = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \\ z = 100 \\ t = 60 \end{cases}$$

dan is $20 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 100 \cdot 2 + 60 \cdot 2$
$= 20 + 240 + 200 + 120$
$= 580$

$\boxed{\text{inkomen = uitgaven.}}$

$\boxed{\text{oef 4}}$

$$\begin{cases} x_1 = 10 + x_2 \\ x_2 = x_3 - 5 \\ x_3 = 12 + x_4 \\ x_4 = x_5 - 15 \\ x_5 = x_6 + 8 \\ x_6 = x_1 - 10 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \text{ wordt nulrij}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

stel $x_1 = \lambda$ dan is
$$\begin{cases} x_2 = \lambda - 10 \\ x_3 = \lambda - 5 \\ x_4 = \lambda - 17 \\ x_5 = \lambda - 2 \\ x_6 = \lambda - 10 \end{cases}$$

ze moeten allemaal positief zijn (anders gaat ... in andere richting)

$x_4 = \lambda - 17$ (sterkste eis)
λ min 17 om x_4 pos te maken

dan is $x_6 = 17 - 10$

$x_6 = 7$

minimaal