# OEFENZITTINGEN HOGERE WISKUNDE II

1e Bachelor Handelsingenieur

## Oefenzitting 2 Inverse matrix, Determinanten

---

OEFENINGEN

1. Gebruik de techniek van elementaire rij-operaties om de inverse te berekenen van de matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) Bereken de determinant met de regel van Sarrus.

   (b) Bereken de determinant door ontwikkeling naar de eerste rij.

   (c) Leid nu de waarde af van volgende determinant enkel door gebruik te maken van de waarde van de vorige determinant en de algemene eigenschappen van determinanten:
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Bereken de determinant van de volgende matrix door deze te herleiden naar een bovendriehoeksmatrix:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bereken
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

   Geef het resultaat als een ontbinding in factoren.
   Hint: zorg er eerst voor dat er op de eerste rij 3 nullen komen. Dit kan door bv. kolom 2 te vervangen door kolom 2 − kolom 1, en hetzelfde te doen met kolom 3 en kolom 4. Dit laat de determinant immers onveranderd (waarom?).

5. Beschouw een functie $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} : t \mapsto A(t)$. Voor elke $t \in \mathbb{R}$ is $A(t)$ dus een $(n \times n)$-matrix waarvan de matrixelementen, we noteren ze met $a_{i,j}(t)$ (met $i, j = 1, \ldots, n$), van $t$ afhangen. Met de functie $A$ corresponderen er dus $(n\times n)$ functies $a_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We nemen aan dat elk van die functies afleidbaar is. Beschouw nu de functie $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto D(t) = \det(A(t))$. Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat:

$$\begin{aligned} D'(t) &= \det\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a'_{2,1} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &\quad + \cdots + \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1} & \cdots & a'_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

EINDUITKOMSTEN

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2. (a) 79

   (b) 79

   (c) -158
3. $-14$
4. $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

## $\boxed{\text{Mentoraat 2}}$

### $\boxed{\text{oef 1}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 5R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_3]{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{5}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

### $\boxed{\text{oef 2}}$

regel v sarrus

= matrix opschrijven + eerste 2 kolommen

ⓐ

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left[1\cdot(-2)\cdot(-1) + (2\cdot 3\cdot 2) + (3\cdot 4\cdot 5)\right] - \left[(2\cdot(-2)\cdot 3) + (5\cdot 3\cdot 1) + (-1)\,4\cdot 2\right]$$

$$(2 + 12 + 60) - \left((-12) + 15 - 8\right)$$

$$74 - (-5)$$

$$\boxed{79}$$

oneven termen → positief
even " → negatief

(b)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot(-13) - 2\,(-10) + 72$$

$$= -13 + 20 + 72$$

$$= 79$$

(c)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

= rijen verwisselen

plaats? maal (-1)

$$= -158$$

oef 3

enige operatie : $\boxed{R_i \rightarrow R_i + aR_j}$

→ als hier nog getal staat beïnvloedt je de determinant.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

rijen mag je wisselen → opletten voor teken verandering.

$$\xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 + R_3]{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - 3R_3 \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{pmatrix} \qquad \det = -44$$

$\boxed{\text{oef } 4}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{pmatrix}$$

voorop zetten

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac-b^2-ab & d^2+ad-b^2-ab \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot 1 \det \begin{pmatrix} c-b & d-b \\ \underbrace{c^2-b^2+a(c-b)}_{=(c-b)(c+b)} & \underbrace{d^2-b^2+a(d-b)}_{=(d-b)(d+b)} \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot (c-b) \cdot (d-b) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a+c+b & a+d+b \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot (c-b)(d-b) \left(\cancel{a}+d+\cancel{b}-\cancel{a}-c-\cancel{b}\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot (c-b)(d-b)(d-c)$$

oef 5

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & - & - & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = D(t)$$

voor $n=2$

$$D'(t) = \det\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \left[a'_{11}(t)\cdot a_{22}(t)\right] - \left[a_{21}(t)\cdot a'_{22}(t)\right] + \left[a_{11}(t)\cdot a'_{22}(t)\right] - \left[a'_{21}(t)\cdot a_{12}(t)\right.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = a_{11}(t)\cdot a_{22}(t) - a_{21}(t)\cdot a_{22}(t)$$

afgeleide daarvan geeft

$$D'(t) = a'_{11}(t)\cdot a_{22}(t) + a_{11}(t)\cdot a'_{22}(t) - \left(a'_{21}(t)\, a_{22}(t) + a_{21}(t)\cdot a'_{22}(t)\right)$$

voor $n=n$ def. afgeleide

$$D'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{D(t+h)-D(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\det\begin{pmatrix} a_{11}(t+h) & \cdots \\ \vdots & \ddots & a_{nn}(t+h) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. - \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \\ & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\right] \qquad \begin{vmatrix} R_1 + R_1' \\ R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1' \\ R_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\det\begin{pmatrix} a_{11}(t+h) - a_{11}(t) & \\ a_{21}(t+h) & \\ & a_{nn}(t+h) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{11}(t) \\ a_{21}(t+h) & \ddots \\ & a_{nn}(t+h) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. - \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \\ & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\right]$$

en zo verder voor alle rijen

bewijs voor $n=3$

$$D'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{h}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} = D(t)$$

$$D'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[ \det \begin{pmatrix} a_{11}(t+h) & a_{12}(t+h) & a_{13}(t+h) \\ a_{21}(t+h) & a_{22}(t+h) & a_{23}(t+h) \\ a_{31}(t+h) & a_{32}(t+h) & a_{33}(t+h) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[ \det \begin{pmatrix} a_{11}(t+h) - a_{11}(t) & a_{12}(t+h) - a_{12}(t) & a_{13}(t+h) - a_{13}(t) \\ a_{21}(t+h) & & \\ & & \end{pmatrix} \right. +$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t+h) & a_{22}(t+h) & a_{23}(t+h) \\ a_{31}(t+h) & a_{32}(t+h) & a_{33}(t+h) \end{pmatrix}$$

$$\left. - \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \right]$$