

OEFENZITTINGEN HOGERE WISKUNDE II

1e Bachelor Handelsingenieur

Oefenzitting 3 Vervolg Lineaire afbeeldingen, Inleiding Lineaire differentievergelijkingen

OEFENINGEN

1. oefening 6 (b), (c) van Montorraat 2:
Beschouw de volgende lineaire afbeelding

$$f: \mathbb{R}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]^3, a + bX + cX^2 \mapsto c + (a + b)X + (a + c)X^2 + (b + c)X^3$$

Neem de basis $D = \{X^2 - 2X + 5, 2X^2 - 3X, X + 3\}$ voor $\mathbb{R}[X]^2$ en de basis $F = \{1, 1 + X, 1 + X^2\}$ voor $\mathbb{R}[X]^3$.

(b) Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 4 & -8 \\ a_{21} & -3 & 4 \\ a_{31} & 2 & 3 \\ a_{41} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de matrix van f t.o.v. de basis D en F

(met a_{11}, a_{21}, a_{31} en $a_{41} \in \mathbb{R}$).

Bepaal de waarde van a_{11}, a_{21}, a_{31} en a_{41} .

- (c) Beschouw de veelterm t met als coördinaten $(-3, 2, 4)$ t.o.v. D . Bereken het beeld van t onder f (geef dit beeld weer als een veelterm) op twee manieren:

- Met het functievoorschrift.
- Via de matrix A , zonder op enige manier gebruik te maken van het functievoorschrift.

2. oef 6 p.464:

Zij $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding tussen vectorruimten $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$. Veronderstel dat $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ een vrij deel is van V .

- (a) Toon aan dat $\{L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)\}$ een vrij deel is van W als L injectief is.
- (b) Illustreer met een expliciet voorbeeld dat injectiviteit van L essentieel is opdat $\{L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)\}$ een vrij deel zou zijn.

3. Beschouw de afbeelding $L: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}: y \mapsto L(y)$ met

$$(L(y))_n = y_{n+2} - 8y_{n+1} + 15y_n$$

- (a) Toon aan dat L lineair is.

Beschouw het lineair probleem:

zoek een rij $y \in \mathcal{R}$ waarvoor geldt dat $L(y) = 0$

(opmerking: wat stelt die 0 voor?)

- (b) Hoe noemen we de vergelijking $L(y) = 0$ nog?

(c) Ga na dat $a \in \mathcal{R}$ met $a_n = 4^n$ een oplossing is van het lineair probleem.

(d) Ga na dat tevens $b \in \mathcal{R}$ met $b_n = n4^n$ een oplossing is van het lineair probleem.

(e) Bewijs dat a en b lineair onafhankelijk zijn in $\mathcal{R}$.

(f) Wat is de algemene oplossing van het lineair probleem en waarom?

4. oef 7 p. 487: Beschouw de differentievergelijking

$$y_{n+2} + (n+2)y_{n+1} - 6(n+2)(n+1)y_n = 0.$$

(a) Van welk type is die differentievergelijking?

(b) Wat weet je van de structuur van de oplossingsruimte?

(c) Vind de algemene oplossing van de vergelijking door eerst oplossingen te zoeken van de vorm $y_n = n! \lambda^n$ met $\lambda \in \mathbb{R}$. Argumenteer waarom je inderdaad de algemene oplossing hebt bekomen.

EINDUITKOMSTEN

1. (b) $a_{11} = -7, a_{21} = 3, a_{31} = 6, a_{41} = -1, (c) 1 + X - 2X^2 + 5X^3$

3. algemene oplossing $y_n = A4^n + Bn4^n$, met $A, B \in \mathbb{R}$

4. algemene oplossing $y_n = An(-3)^n + Bn12^n$, met $A, B \in \mathbb{R}$

oefening 2

oef 1 ⊕ i de kolom = beeld v/d i'de basisvector.

HIER: $f(x^2 - 2x + 5)$

$$f(x^2 - 2x + 5) = 1 + (5 - 2)x + (5 + 1)x^2 + (-2 + 1)x^3 \\ = 1 + 3x + 6x^2 - x^3$$

$$a_{11} + a_{21}(1+x) + a_{31}(1+x^2) + a_{41}(1+x^3) = 1 + 3x + 6x^2 - x^3 \\ = a_{11} + a_{21} + a_{21}x + a_{31} + a_{31}x^2 + a_{41} + a_{41}x^3 = 1 + 3x + 6x^2 - x^3 \\ = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41}) + a_{21}x + a_{31}x^2 + a_{41}x^3 =$$

$$\begin{cases} a_{41}x^3 = -x^3 \\ a_{31}x^2 = 6x^2 \\ a_{21}x = 3x \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{41} = -1 \\ a_{31} = 6 \\ a_{21} = 3 \\ a_{11} = -7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{c} \rightarrow -3(x^2 - 2x + 5) + 2(2x^2 - 3x) + 4(x + 3)$$

$$= -3x^2 + 6x - 15 + 4x^2 - 6x + 4x + 12$$

$$= x^2 + 4x - 3$$

dus $a = -1$; $b = 4$; $c = -3$

invullen in f .

$$1 + (4 - 3)x + (-3 + 1)x^2 + (4 + 1)x^3$$

$$1 + x - 2x^2 + 5x^3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{coördinaten t.o.v. basis } f \\ -3 \cdot 1 + (4)(x) + (-2)(1+x^2) \\ + (5)(1+x^3) \\ = -3 + 4x - 2 - 2x^2 + 5 + 5x^3 \\ = 1 + x - 2x^2 + 5x^3 \end{matrix}$$

oef 2
ⓐ vrij deel, als $\alpha = 0$ dan is $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$

$$a_1 L(e_1) + a_2 L(e_2) + \dots + a_n L(e_n) = 0 \quad \left. \begin{matrix} \text{wegens} \\ \text{lineariteit} \end{matrix} \right\} \\ L(a_1 e_1) + L(a_2 e_2) + \dots + L(a_n e_n) = 0$$

$$L(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n) = 0$$

nepropontie

wegens de injectiviteit moet het dus laatste staat

⑤ vertrekken v le vrij deel, zodat beeld niet vrij is

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{array}{ll} (1, 0, 0) & \mapsto (1, 2, 3) \\ (0, 1, 0) & \mapsto (1, 2, 3) \\ (0, 0, 1) & \mapsto (4, 5, 6) \end{array}$$

vrij deel
want basis

↑
niet vrij want 2 dezelfde

oef 3 als $y, z \in \mathbb{R}$ dan.

$$\begin{aligned} \textcircled{a} (L(ay + bz))_n &= (aL(y) + bL(z))_n \\ &= ay_{n+2} - 8ay_{n+1} + 16ay_n + bz_{n+2} - 8bz_{n+1} + 16bz_n \\ &= a(y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n) + b(z_{n+2} - 8z_{n+1} + 16z_n) \end{aligned}$$

⑥ nul = nulrij

$L(y) = 0$ homogene differentieelgl.

⑦ invullen.

$$\begin{aligned} 4^{n+2} - 8 \cdot 4^{n+1} + 16 \cdot 4^n &= 4^{n+2} - 2 \cdot 4 \cdot 4^{n+1} + 4^2 \cdot 4^n \\ &= 4^{n+2} - 2 \cdot 4^{n+2} + 4^{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

of 4^n voorop

$$4^n (16 - 32 + 16) = 0$$

$$\textcircled{d} (n+2) 4^{n+2} - 8(n+1) 4^{n+1} + 16n 4^n = 0$$

$$4^n (16(n+2) - 32(n+1) + 16n)$$

$$= 4^n (16n + 32 - 32n - 32 + 16n)$$

= 0 dus oplossing.

⑧ 2 rijen zijn lineair onafhankelijk als geen veelvoud zijn v elkaar. (dus eerste termen opschrijven)

$$a_n = \{1, 4, 16, 64, \dots\}$$

$$b_n = \{0, 4, 32, 192, \dots\}$$

dus geen veelvoud
dus lineair onafh.

f) van dim 2, dus 2 lineair onafh. oplossingen nodig.
om algemene opl. verz. te vinden.
 $y_n = A 4^n + B (-4)^n$

opg 4

a) homogene lineaire differentiaalvergelijking

b) $\dim = 2$.

c) we zoeken oplossingen van de vorm $n! \lambda^n$ met λ te invullen.

$$\begin{aligned} & (n+2)! \lambda^{n+2} + (n+2)(n+1)! \lambda^{n+1} - 6(n+2)(n+1)! \lambda^n = 0 \\ & (n+2)! [\lambda^{n+2} + \lambda^{n+1} - 6\lambda^n] = 0 \\ & = [\lambda^{n+2} + \lambda^{n+1} - 6\lambda^n] = 0 \\ & = \lambda^n [\lambda^2 + \lambda - 6] = 0 \\ & \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 2 \quad \vee \quad \lambda = -3 \end{aligned}$$

$$x_n = n! (2)^n$$

$$z_n = n! (-3)^n$$

algemene opl : $y_n = A n! (2)^n + B n! (-3)^n$