

OEFEENZITTINGEN HOGERE WISKUNDE II

1e Bachelor Handelsingenieur

Oefenzitting 4 Eigenwaarden, eigenvectoren

OEFENINGEN

1. Oefening 1 p.537, tweede matrix : Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Is de matrix diagonaliseerbaar ?

2. Oefening 9 p. 538 : Beschouw de stochastische matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van P .
(b) Toon aan dat P niet diagonaliseerbaar is.
(c) Ga na dat Propositie 6.2.2.5 opgaat voor P door expliciet de machten van P te berekenen.
3. Oefening 10 p. 539 : Beschouw drie rijen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, waarvan je weet dat $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ en $z_0 = 1$.
Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

EINDUITKOMSTEN

1. eigenwaarde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, alle eigenvectoren van de vorm $\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ met $(r, s) \neq (0, 0)$

2. (a) eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ met eigenvectoren van de vorm $\begin{pmatrix} 7r \\ 4r \\ 5r \end{pmatrix}$ met $r \in \mathbb{R}_0$,

eigenwaarde $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ met eigenvectoren van de vorm $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$ met $r \in \mathbb{R}$,

(c) $P^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

OEFENZITTIN 4

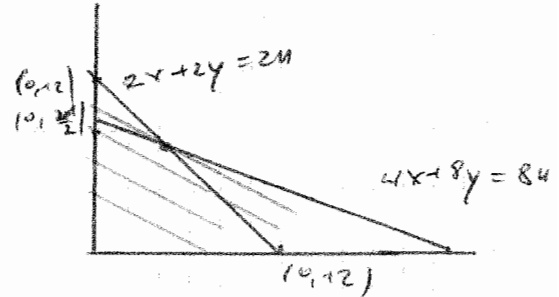
4/5
2504

① Variabelen benoemen $x = \text{aantal pakketten} \rightarrow 15 \in (4 \text{ wit}, 2 \text{ geel})$
 $y = \text{ " " " " } \rightarrow 20 \in (8 \text{ wit}, 2 \text{ "})$

② Stel de te optimaliseren functie op:

hier opbrengst $15x + 20y$

③ stel voorwaarden op: $x \geq 0 \quad y \geq 0$
 $4x + 8y \leq 84$
 $2x + 2y \leq 24$



④ stel toelaatbaar gebied voor.

⑤ stel hoogst-niveau lijn op $15x + 20y$
 of $y = \frac{c}{20} - \frac{3}{4}x$

⑥ optimum zoek.

oef 1 $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

met $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2 vrijheidsgrade $x_3 = 1$
 $x_2 = 1$
 $x_1 = 0$
 eigenvector v/d vorm $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

diagonaliseerbaar

als eigenvectoren ~~te~~ voortbrengend zijn voor heel $\mathbb{R}^3$
 en hier is $x = 0$ dus niet diagonaliseerbaar.

oef 9

② $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 - \lambda & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 - R_3} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 - \lambda & \lambda \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 - \lambda \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2} - \lambda \left(\left(-\frac{1}{4} - \lambda \right) \left(\frac{1}{4} - \lambda \right) - \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \lambda \right)$$

$$\frac{1}{2} - \lambda \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \lambda - \frac{1}{4} \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \lambda + \frac{1}{8} \right)$$

... LIJN IS VERDWENEN ...
 ONZE EXCUSES

$$\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2 (1 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

voor $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{vector v.d.vorm} \begin{pmatrix} -\Delta \\ 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$$

voor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 3/4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{stel } x_3 = r \\ \text{dan is } x_2 = \frac{4}{5}r \\ x_1 = \frac{7}{5}r \end{matrix}$$

deus eigenvector v.d.vorm $\begin{pmatrix} 7/5 \\ 4/5 \\ r \end{pmatrix}$

⑤ nee, slechts 2 basisvectoren in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ at voldoende

⑥ (1) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/16 & 2/16 & 7/16 \\ 2/8 & 2/8 & 2/8 \\ 5/16 & 3/16 & 5/16 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7/16 & 7/16 & 7/16 \\ 2/16 & 4/16 & 4/16 \\ 5/16 & 5/16 & 3/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7r \\ 4r \\ 5r \end{pmatrix} \quad \text{eigenvector v } \lambda = 1$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 4/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{dus met } r = \frac{1}{16} \\ \text{dan geeft de} \\ \text{som v.d. elementen} \\ 1. \end{matrix}$$

(2) $P^* =$ matrix met elke kolom $= x^* = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 4/16 \\ 5/16 \end{pmatrix}$

$\downarrow$
v. proportieel

oef 10 p 5-9

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \\ = \dots = \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

dan eigen waarden en eigenvectoren zoeken

$$A^n = Q \cdot D^n \cdot Q^{-1}$$

$$\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -2-\lambda \quad (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 \\ = -2-\lambda \quad (9-6\lambda+\lambda^2-1) \\ = -2-\lambda \quad (8-6\lambda+\lambda^2) \\ \Delta = 4 \quad \begin{cases} \frac{6+8}{2} = 4 \\ \frac{6-8}{2} = -2 \end{cases}$$

rekening houden met $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eigenvectoren

bij $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ in matrix terug

$$\begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eigenvector v/d vorm $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

bij $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eigenvector v/d vorm } \begin{pmatrix} -3 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

