OEFENZITTINGEN HOGERE WISKUNDE II

1e Bachelor Handelsingenieur

Oefenzitting 5 Optimalisatie : vrije extrema

---

1. Oefening 1 p.577-578 : Toon aan dat de matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
positief definitief is. Doe dit zowel met de eigenwaardemethode als met de determinantenmethode.

2. Oefening 4 p.578 : Zij A een symmetrische matrix. Zijn volgende uitspraken waar of vals? Leg uit.
   (a) Als A positief definiet is, dan moeten alle matrixelementen positief zijn.
   (b) Als alle matrixelementen van A strikt positief zijn, dan is A positief definiet.

3. Oefening 1 (a) p.586 : Bepaal de extrema van de volgende functie. Gebruik de tweede orde conditie om na te gaan of je te maken hebt met een minimum of een maximum.
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - xy + xz + yz$

   Oplossing : in $(0, 0, 0)$ *bereikt* f *een globaal minimum.*

4. Oefening 2 p.586 : Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die continue afgeleiden heeft minstens tot de tweede orde. Veronderstel dat $f'(0) < 0$. Beschouw nu de functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = f(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$. Toon aan dat g een lokaal maximum bereikt in $(0, 0, 0)$.

5. Een bedrijf wil twee nieuwe producten lanceren. Wanneer $R_1 * 100$ euro besteed wordt aan research voor product 1, en $P_1 * 100$ euro aan promotie voor product 1, zullen er $\dfrac{160R_1}{160 + R_1} + \dfrac{320P_1}{80 + P_1}$ van deze producten verkocht worden. Dit product wordt gefabriceerd aan 200 euro per stuk, en verkocht aan 600 euro per stuk.
   Wanneer $R_2 * 100$ euro besteed wordt aan research voor product 2, en $P_2 * 100$ euro aan promotie voor product 2, zullen er $\dfrac{40R_2}{40 + R_2} + \dfrac{120P_2}{30 + P_2}$ van deze producten verkocht worden. Dit product wordt gefabriceerd aan 900 euro per stuk, en verkocht aan 1800 euro per stuk.

   Het bedrijf beschikt over een onuitputtelijk budget en kan dus onbegrensd investeren in research en promotie. Hoeveel moet er worden geïnvesteerd in research en promotie voor beide producten om een maximale winst te bereiken? Ga na dat je hier wel degelijk een *maximum* bereikt.
   Oplossing : $R_1 = 160, P_1 = 240, R_2 = 80, P_2 = 150$

Oefenzitting 5

$\boxed{\text{oef 4}}$

* $D_1 g(x,y,z) = D_1 f(x^2+2y^2+3z^2)$
$= f'(x^2+2y^2+3z^2) \cdot 2x$

$D_2 g(x,y,z) = D_2 f(x^2+2y^2+3z^2)$
$= f'(x^2+2y^2+3z^2) \cdot 4y$

$D_3 g(x,y,z) = D_3 f(x^2+2y^2+3z^2)$
$= f'(x^2+2y^2+3z^2) \cdot 6z.$

als $(x,y,z) = (0,0,0)$ dan is $D_1 g = D_2 g = D_3 g = 0$
dus $(0,0,0)$ is kritiek punt.

* $D_{11} g(x,y,z) = f''(x^2+2y^2+3z^2) \cdot 2x \cdot 2x + f'(x^2+2y^2+3z^2) \cdot 2$
$D_{12} g(x,y,z) = f''(\quad) \cdot 4y \cdot 2x$
$D_{13} g(x,y,z) = f''(\quad) \cdot 6z \cdot 2x$
$D_{22} g(x,y,z) = f''(\quad) \cdot 4y \cdot 4y + f'(\quad) \cdot 4$
$D_{23} g(x,y,z) = f''(\quad)\, 6z \cdot 4y$
$D_{33} g(x,y,z) = f''(\quad)\, 6z \cdot 6z + f'(\quad) \cdot 6$

* $H_g(0,0,0) = \begin{pmatrix} f'(-)\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4f'(-) & 0 \\ 0 & 0 & 6f'(-) \end{pmatrix}$

aangezien $f'(0) < 0$
is Hessiaan negatief definiet. dus bereikt g een lokaal maximum in $(0,0,0)$

$\boxed{\text{oef } 5}$

$$W(R_1,P_1,R_2,P_2) = 600\left(\frac{160R_1}{160+R_1} + \frac{320P_1}{80+P_1}\right) + 1800\left(\frac{40R_2}{40+R_2} + \frac{120P_2}{30+P_2}\right)$$

$$-200\left(\quad\right) - 900\left(\quad\right)$$

$$-P_1\cdot 100 - R_1\cdot 100 - P_2\,100 - R_2\cdot 100$$

$$= 400\left(\quad\right) + 900\left(\quad\right)$$

$$-P_1\cdot 100 - R_1\cdot 100 - P_2\cdot 100 - R_2\cdot 100$$

$$= \frac{64\,000R_1}{160+R_1} + \frac{128\,000P_1}{80+P_1} + \frac{36\,000R_2}{40+R_2} + \frac{10\,8000\,P_2}{30+P_2}$$

$$-P_1 100 - R_1\cdot 100 - P_2\,100 - R_2\cdot 100$$

$$D_1W(R_1,P_1,R_2,P_2) = \frac{64\,000\cdot(160+R_1) - 64\,000R_1}{(160+R_1)^2} - 100$$

$$D_2W(\longrightarrow) = \frac{128\,000(80+P_1) - 128000P_1}{(80+P_1)^2} - 100$$

$$D_3W(\longrightarrow) = \frac{36\,000(40+R_2) - 36000R_2}{(40+R_2)^2} - 100$$

$$D_4W(\longrightarrow) = \frac{10\,8000(30+P_2) - 10\,800\,P_2}{(30+P_2)^2} - 100$$

$$\Longleftrightarrow\quad D_1W(\text{—}) = 10\,240\,000 = 100\,(160+R_1)^2$$

$$102\,400 = (160+R_1)^2$$

$$320 = (160+R_1)$$

$$160 = R_1$$

$$D_2W(\text{—}) = 10\,240\,000 = 100(80+P_1)^2$$

$$320 = 80+P_1$$

$$240 = P_1$$

$$D_3W(\text{—}) = 1\,440\,000 = 100(40+R_2)^2$$

$$120 = 40+R_2$$

$$80 = R_2$$

$$D_4W(\text{—}) = 3\,240\,000 = 100(30+P_2)^2$$

$$180 = 30+P_2$$

$$150 = P_2$$

dus $(160, 240, 80, 150)$ is kritiek punt

$$D_{11} w(\text{—}) = \frac{-2(160+R_1) \cdot 10240000}{(160+R_1)^4}$$

$$D_{22} w(\text{—}) = \frac{-2(80+P_1)\, 10240000}{(80+P_1)^4}$$

$$D_{33} w(\text{—}) = \frac{-2(40+R_2)\, 1440000}{(40+R_2)^4}$$

$$D_{44} w(\text{—}) = \frac{-2(30+P_2)\, 3240000}{(30+P_2)^4}$$

Hessiaan is diagonaal matrix.

$$Hw(160, 240, 80, 150) = \begin{pmatrix} -0{,}625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$D_1 < 0 \qquad D_2 > 0 \qquad D_3 < 0 \qquad D_4 > 0$

dus maximum.