Volgende

Vraag 1

Bepaal de buigpunten van de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$.

Correct antwoord

$$\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$ geldt:

- $y' = (\frac{\ln x}{x})' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln x = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$
- $y'' = (\frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x))' = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cdot (1 - \ln x) = -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x)$

Vervolgens bereken we het nulpunt van de tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} y'' = 0 \iff -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x) &= 0 \\ 3 - 2\ln x &= 0 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ x &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

De tekentabel van y'' is gelijk aan:

x	$-\infty$		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$	$\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}$	$\cup$	

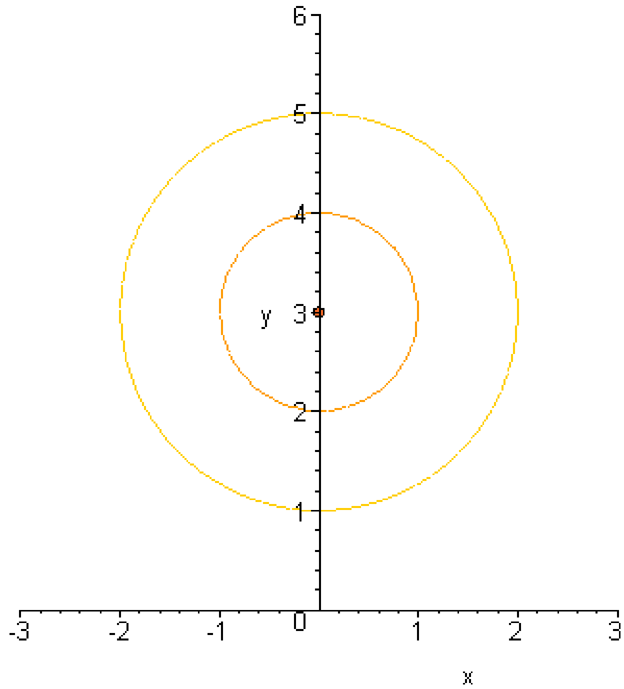
Besluit:

Het buigpunt van de gegeven kromme is $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Info: differentiaalrekenen - vraag 38, auteur: Kristien Wauters, bron: Oefeningen wiskunde - Karl Hoefkens - KHK, id: 4659

Vraag 2

Gegeven de niveaulijnen van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (niveau 0 is oranje, niveau 1 is lichtoranje, niveau 2 is geel).



Wat is het voorschrift van f?

Correct antwoord

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De niveaulijn die behoort bij niveau c (met $c \in \mathbb{R}$) is gelijk aan de verzameling

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

De niveaulijnen zijn cirkels met middelpunt $(0, 3)$. Merk op dat de afstand tussen 2 opeenvolgende niveaulijnen steeds 1 is.
Herinner je dat de vergelijking van een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r gegeven wordt door $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Voor alle voorschriften geldt dat de niveaulijn bij niveau c met $c < 0$ gelijk is aan de lege verzameling, want steeds is $f(x, y) \geq 0$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. We overlopen de voorschriften:

1. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.

2. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is juist, maar de straal niet. Zo is bijvoorbeeld de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{2}$.

3. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is een ellips (en geen cirkel): $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{c})^2} = 1\}$.

4. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal c: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = c^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.

5. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal c: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = c^2\}$. De niveaulijn N_1 die behoort bij niveau 1 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 1, de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 2.

Info: Niveaulijnen van een functie in 2 veranderlijken, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 1983

Vraag 3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$$

Correct antwoord

$$-\infty$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

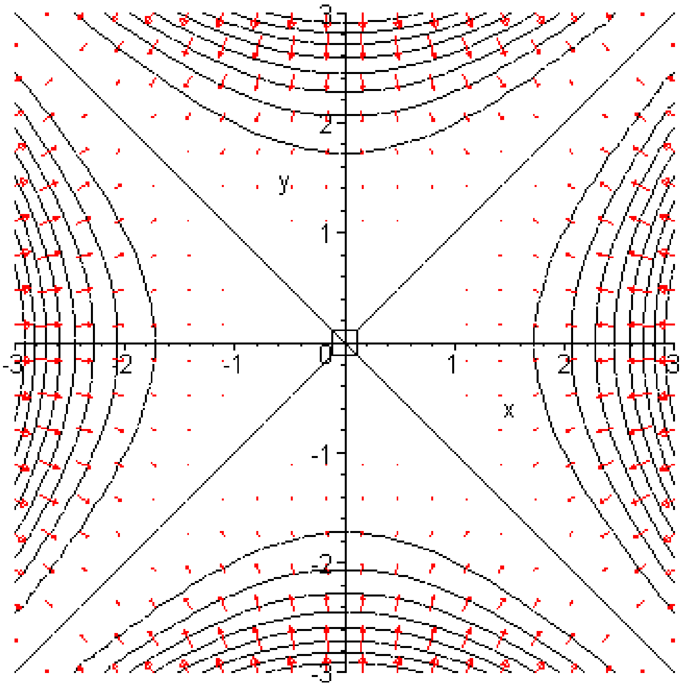
Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}(2x-1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1028

Vraag 4

Gegeven de niveaulijnen en het gradiëntvectorveld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

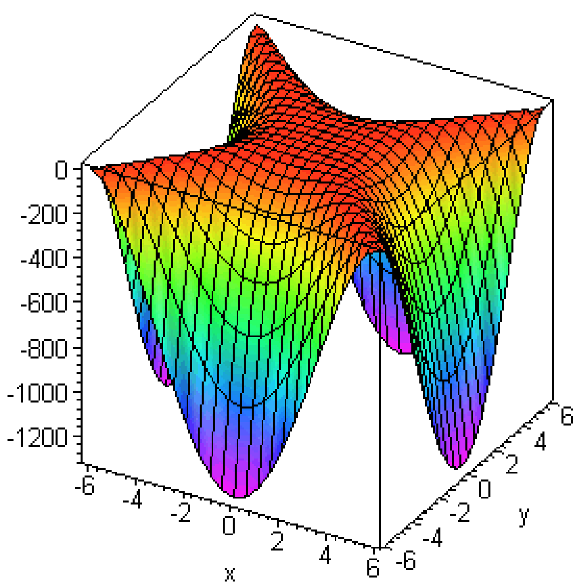
De functie bereikt in de oorsprong een globaal maximum.

Jouw antwoord

Geen antwoord

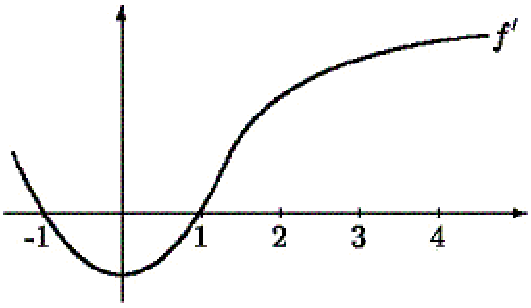
Oplossing

Let op: $(0,0)$ is geen zadelpunt. Als je in gelijk welke richting van $(0,0)$ wegloopt, daalt de functiewaarde of blijft ze hetzelfde. Merk op dat f in de punten op de rechte met vergelijking $y = x$ en in de punten op de rechte met vergelijking $y = -x$ dezelfde functiewaarde aanneemt als in $(0,0)$. Dus de functie f bereikt in de oorsprong $(0,0)$ een lokaal maximum, maar ook een globaal maximum. Hieronder vind je de grafiek van f.



Vraag 5

Van een afleidbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is hier de grafiek van de afgeleide f' getekend. Wat kun je besluiten over f?



Correct antwoord

$f(2) - f(1) \leq f(3) - f(2)$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt dat er een $c_1 \in]1,2[$ en een $c_2 \in]2,3[$ bestaat zo dat

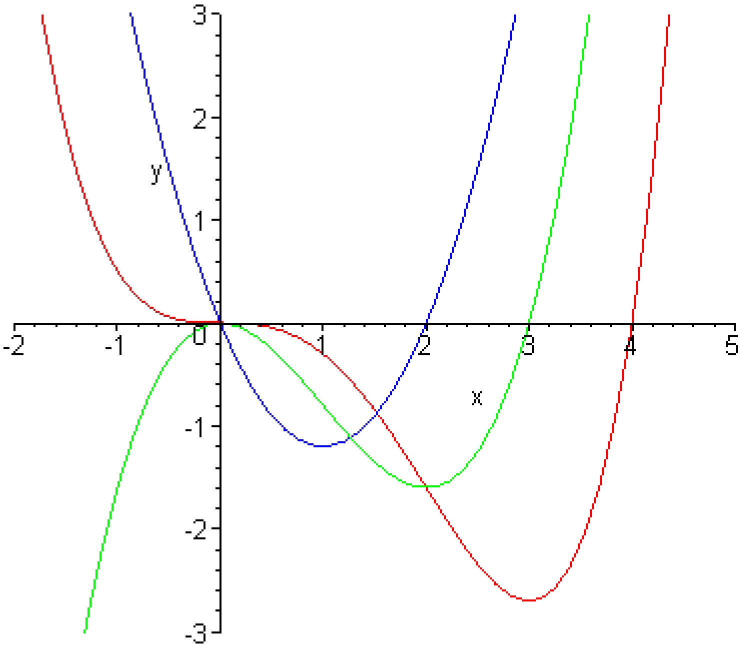
$$f(2) - f(1) = f'(c_1) \quad \text{en} \quad f(3) - f(2) = f'(c_2).$$

Op de grafiek van f' zien we dat $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Uitspraak 2 is dus correct.
Het is bovendien niet moeilijk om te argumenteren waarom uitspraken 1 en 3 fout zijn (doe dit!).

Info: auteur: Johan Quaegebeur, bron: proef97, id: 1529

Vraag 6

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is rood, die van haar afgeleide f' is groen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

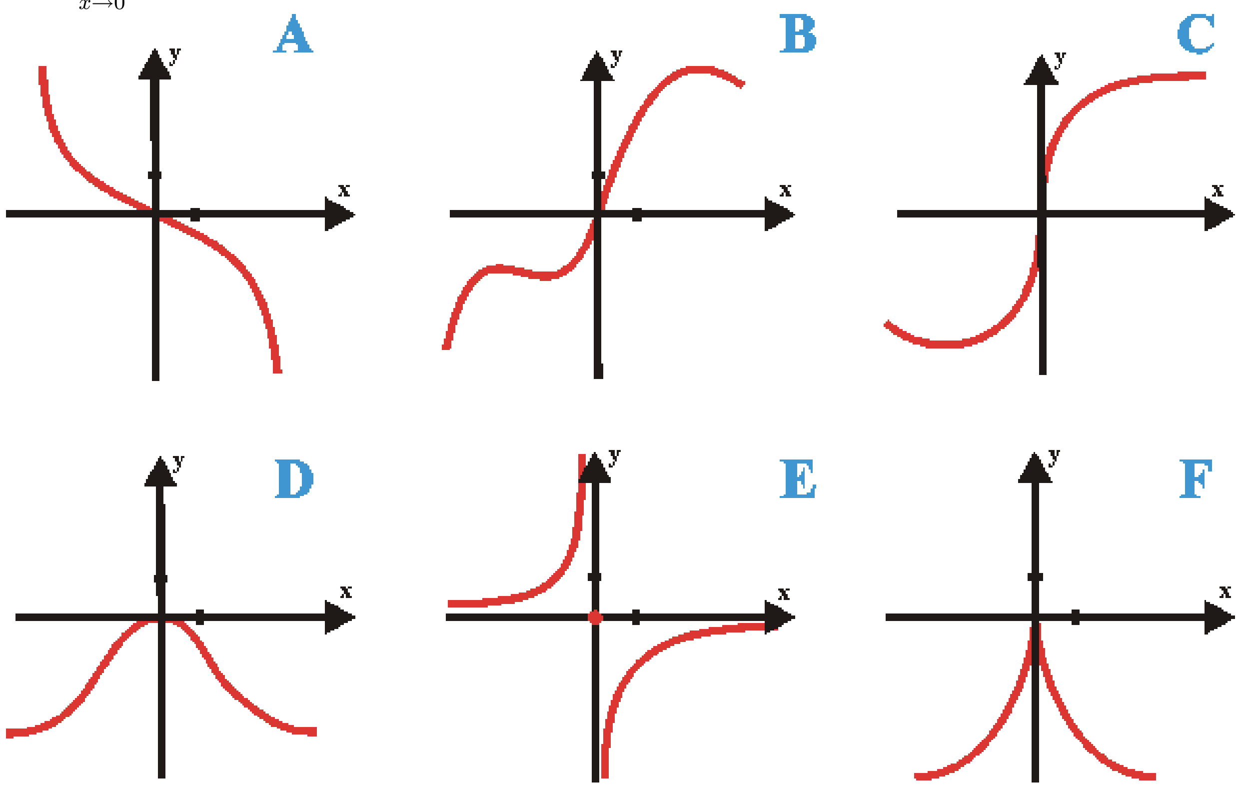
Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De grafiek van f is rood, die van f' is groen en die van f'' is blauw. We controleren of dit kan. We zien dat f' negatief (of 0) is tot 3 en daarna positief. Dan zou f dalend moeten zijn tot 3 en daarna stijgend. Verder is f'' positief tot 0, daarna negatief tot 2 en daarna weer positief. Dan zouden 0 en 2 buigpunten moeten zijn van f en de holle zijde van de grafiek van f zou vóór 0 naar boven gericht moeten zijn, tussen 0 en 2 naar onder gericht en daarna weer naar boven gericht. Dit klopt allemaal!

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2192

Vraag 7

Welke van onderstaande grafieken kunnen bij een functie f horen die voldoet aan

1. $f(0) = 0$,
2. $f''(x) > 0$ als $x < 0$,
3. $f''(x) < 0$ als $x > 0$,
4. $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$?



Correct antwoord

Grafiek C en E.

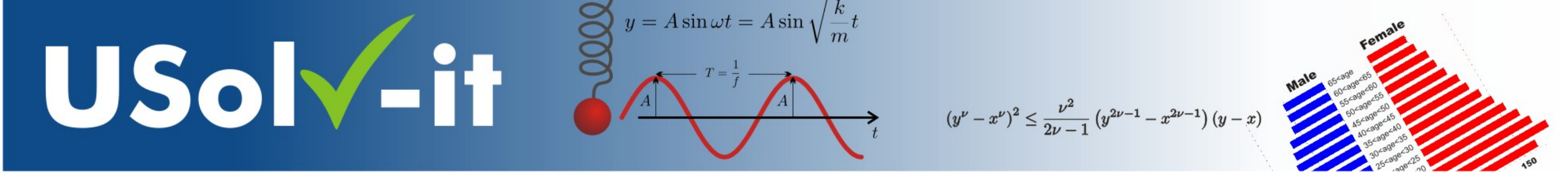
Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Grafiek A voldoet niet aan de vierde eis.
Als x tot 0 nadert, zal de raaklijn aan de grafiek van f in $(x, f(x))$ tot ongeveer -0.5 naderen.
Bij grafiek B is al niet voldaan aan $f''(x) > 0$ als $x < 0$:
de holle zijde is er eerst naar onder gericht ($\frown$) en vervolgens naar boven gericht ($\smile$).
Bij grafiek D is ook niet voldaan aan $f''(x) > 0$ als $x < 0$:
de holle zijde is er eerst naar boven gericht ($\smile$) en vervolgens naar onder gericht ($\frown$).
Bij grafiek F is niet voldaan aan $f''(x) < 0$ als $x > 0$:
de holle zijde is er naar boven gericht ($\smile$).
Bij grafiek C en E zijn alle eisen voldaan:

1. $f(0) = 0$;
2. de holle zijde is naar boven gericht ($\smile$) op $]-\infty, 0[$;
3. de holle zijde is naar onder gericht ($\frown$) op $]0, +\infty[$;
4. als x tot 0 nadert, dan nadert de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f tot $+\infty$, d.w.z. de raaklijn nadert tot vertikale stand.



Vraag 8

Als $f(3) = 4$, $f'(3) = 12$ en $g(x) = \sqrt{f(x)}$, wat is dan $g'(3)$?

Correct antwoord

3

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

We vinden de oplossing door de kettingregel toe te passen.
Eerst de afgeleide zoeken in een willekeurige x :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

Dan pas $x = 3$ invullen :

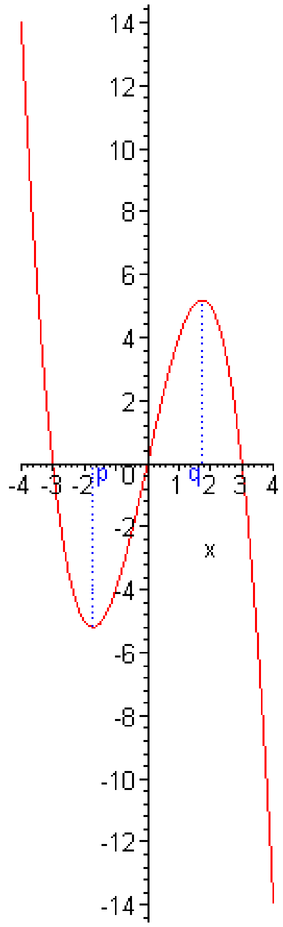
$$\Longrightarrow \quad g'(3) = \frac{1}{2\sqrt{f(3)}} f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} 12 = 3.$$

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1021

Vorige Volgende

Vraag 9

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie. Gegeven is de grafiek van de afgeleide van f.



Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Jouw antwoord

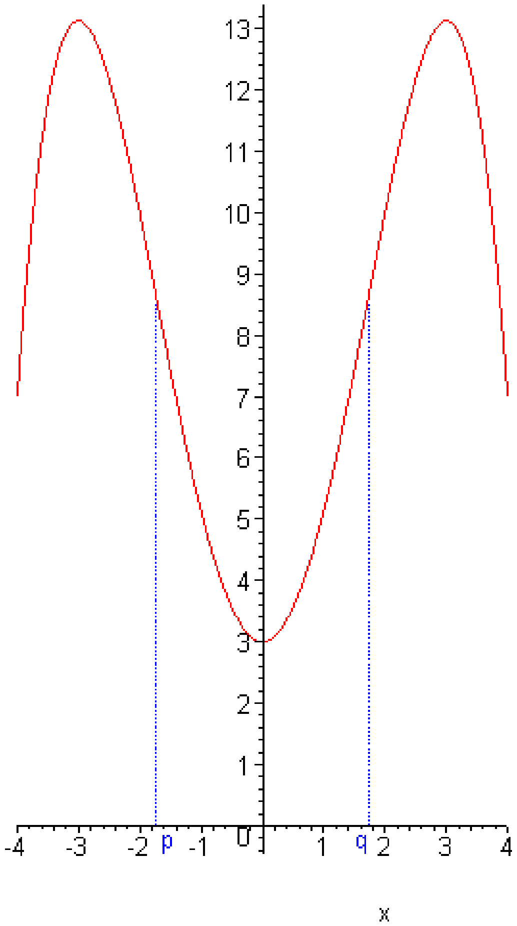
Geen antwoord

Oplossing

We maken het tekenonderzoek van f':

x		-3		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

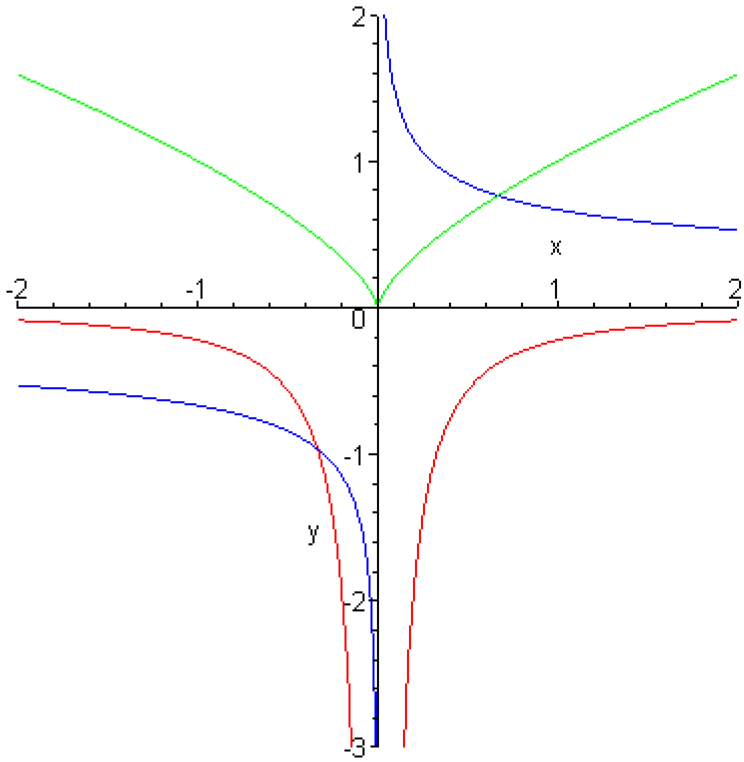
De functie f zou er als volgt kunnen uitzien:



De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Vraag 10

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is groen, die van haar afgeleide f' is blauw.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De grafiek van f is groen, die van f' is blauw en die van f'' is rood. We controleren of dit kan. We zien dat f' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en positief op $]0, \infty[$. Dan zou f dalend moeten zijn tot 0 en daarna stijgend. Er zou geen raaklijn aan de grafiek van f in $(0, f(0))$ mogen bestaan. Verder is duidelijk dat f'' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en negatief op $]0, \infty[$. Dan zou de holle zijde van de grafiek van f vóór 0 en achter 0 naar beneden gericht moeten zijn. Dit klopt allemaal!

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2195

Vraag 11

Wat kan je over de volgende functie zeggen?
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -e^{-x}$.

Correct antwoord

f is orde-bewarend.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Een functie is orde-bewarend $\Leftrightarrow \forall x, y : \ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Een functie is orde-omkerend $\Leftrightarrow \forall x, y : \ x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.
Veronderstel dat $x, y \in \mathbb{R}$ en dat $x \leq y$. Dan geldt het volgende

$$\begin{array}{rcll} x & \leq & y & \\ -x & \geq & -y & \\ e^{-x} & \geq & e^{-y} & \quad \text{(de exponentiële functie is orde-bewarend)} \\ -e^{-x} & \leq & -e^{-y}. & \end{array}$$

We zien dat $x \leq y \Rightarrow -e^{-x} \leq -e^{-y}$, de functie $f(x) = -e^{-x}$ is bijgevolg orde-bewarend.

Info: auteur: Paul Igodt, Bram De Rock, bron: Oefenmateriaal TEW - KULAK, id: 1007

Vraag 12

Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en dat $a - b > 0$. Verder is gegeven dat $a^3 - 3a^2b - b^3 = 0$. Dan is $\log(a-b)$ gelijk aan

Correct antwoord

$\frac{1}{3}(\log 3 + \log a + 2\log b)$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Uit het gegeven volgt dat

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= 3ab^2\end{aligned}$$

Bijgevolg geldt

$$\begin{aligned}\log(a-b) &= \frac{1}{3}\log(a-b)^3 \\ &= \frac{1}{3}\log 3ab^2 \\ &= \frac{1}{3}(\log 3 + \log a + 2\log b).\end{aligned}$$

Info: auteur: Frederik Houpline, Paul Igodt, Bram De Rock, id: 1042

Vraag 13

Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

Welke uitspraken zijn correct ?

(a) $f(x)$ is wel gedefinieerd maar niet continu in $x = 0$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

(c) Voor elke $x \neq 0$ geldt dat $f(x) = 2\ln(x)$.

(d) Voor elke $x < 0$ geldt dat $f(x) = 2\ln(-x)$.

Correct antwoord

(a), (b) en (d)

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

(a) is correct want $f(0) = 0$, maar $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \neq f(0)$
(b) is correct. Door toepassing van de regel van de l' Hospital vinden we

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = 0$$

(c) is niet correct want $\ln(x)$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(d) is correct want $(-x) > 0$ en $2\ln(-x) = \ln(-x)^2 = \ln(x^2)$

Info: logaritme, auteur: Paul Dierckx, bron: Toelatingsexamen ir. juli 2000, id: 1365

Vraag 14

Als $\exp(4x) = 10^{x-1}$, dan is

Correct antwoord

$x \approx -1{,}36$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De oplossing van de vergelijking vinden we als volgt :

$$\begin{array}{rrcl} & \exp(4x) & = & 10^{x-1} \\ \Leftrightarrow & 4x & = & (x-1)\ln 10 \\ \Leftrightarrow & (4-\ln 10)x & = & -\ln 10 \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{\ln 10}{4-\ln 10} \\ \Leftrightarrow & x & \approx & -1{,}356 \approx -1{,}36. \end{array}$$

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1460

Vraag 15

Als $0 < a < b < 1$ en $0 < r < s$, dan is

Correct antwoord

$a^s < b^r$

Jouw antwoord

Geen antwoord

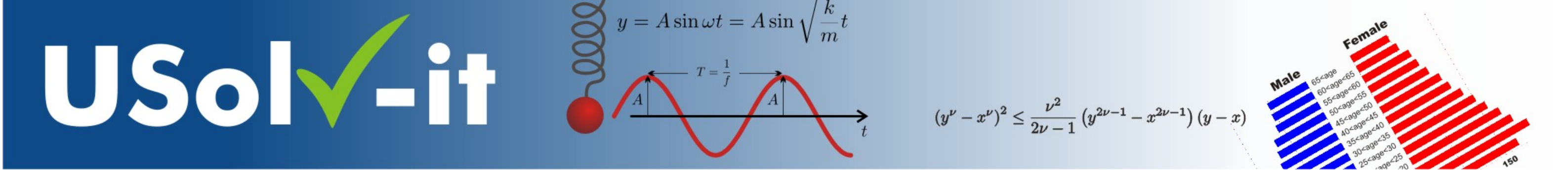
Oplossing

We weerleggen de foutieve uitspraken m.b.v. telkens een tegenvoorbeeld.

1. Stel $a = 0.25$, $b = 0.5$, $r = 1$, $s = 2$. $\longrightarrow (0.5)^2 = 0.25 \not< 0.25 = (0.25)^1$
2. Stel $a = 0.5$, $r = 2$, $s = 3$. $\longrightarrow (0.5)^2 = 0.25 \not< 0.125 = (0.5)^3$.
3. Stel $b = 0.5$, $r = 2$, $s = 3$. $\longrightarrow (0.5)^2 = 0.25 \not< 0.125 = (0.5)^3$.

Via eliminatie is uitspraak 4 correct.
Men kan ook "positief" redeneren. Daar $0 < a < b < 1$ en $s > 0$, geldt dat $a^s < b^s$. Omdat $b < 1$ is de exponentiële functie met grondtal b monotoon dalend; bijgevolg geldt, als $0 < r < s$ dat $b^r > b^s$. We besluiten dus dat $a^s < b^r$.

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1464



Vraag 16

$f(x) = \cos(3\,x + \frac{5\,\pi}{3})$ heeft periode :

Correct antwoord

$\frac{2\,\pi}{3}$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De functie $f(x)$ heeft dezelfde periode als de functie $\cos(3\,x)$, die periode $\frac{2\,\pi}{3}$ heeft.

Info: auteur: tanja van hecke, ann de bodt, id: 3570

Vraag 17

De oplossingen van de vergelijking

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

zijn:

Correct antwoord

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (\text{met } k \in \mathbb{Z})$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De vergelijking valt uiteen in 2 vergelijkingen:

$$1) \ \cos x = \frac{1}{2}$$

Heeft als oplossingen

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{met } k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \ \cos x = -\frac{1}{2}$$

met als oplossingen

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{met } k \in \mathbb{Z})$$

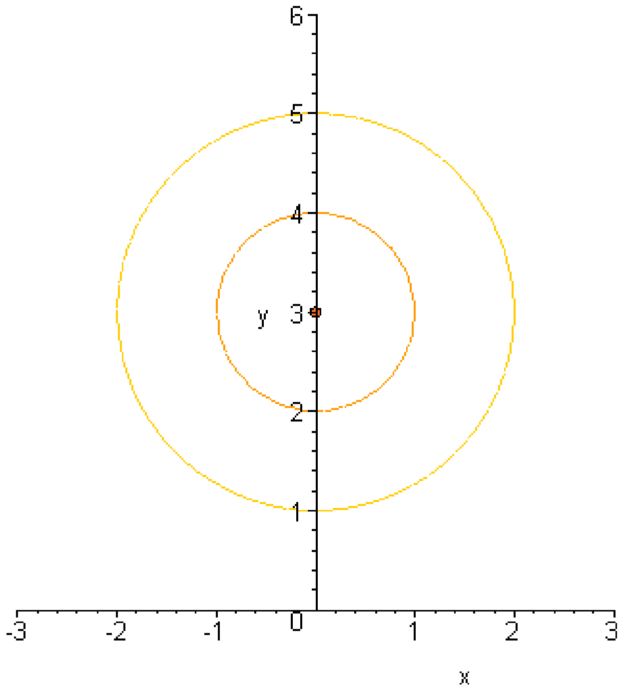
De oplossingen kunnen we groeperen tot

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (\text{met } k \in \mathbb{Z})$$

Info: Goniometrische basisvergelijking, auteur: Marc Van Kerckhoven, id: 3944

Vraag 18

Gegeven de niveaulijnen van een functie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (niveau 0 is oranje, niveau 1 is lichtoranje, niveau 2 is geel).



Wat is het voorschrift van f?

Correct antwoord

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De niveaulijn die behoort bij niveau c (met $c \in \mathbb{R}$) is gelijk aan de verzameling

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

De niveaulijnen zijn cirkels met middelpunt $(0, 3)$. Merk op dat de afstand tussen 2 opeenvolgende niveaulijnen steeds 1 is.
Herinner je dat de vergelijking van een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r gegeven wordt door $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Voor alle voorschriften geldt dat de niveaulijn bij niveau c met $c < 0$ gelijk is aan de lege verzameling, want steeds is $f(x, y) \geq 0$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. We overlopen de voorschriften:

1. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.

2. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is juist, maar de straal niet. Zo is bijvoorbeeld de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{2}$.

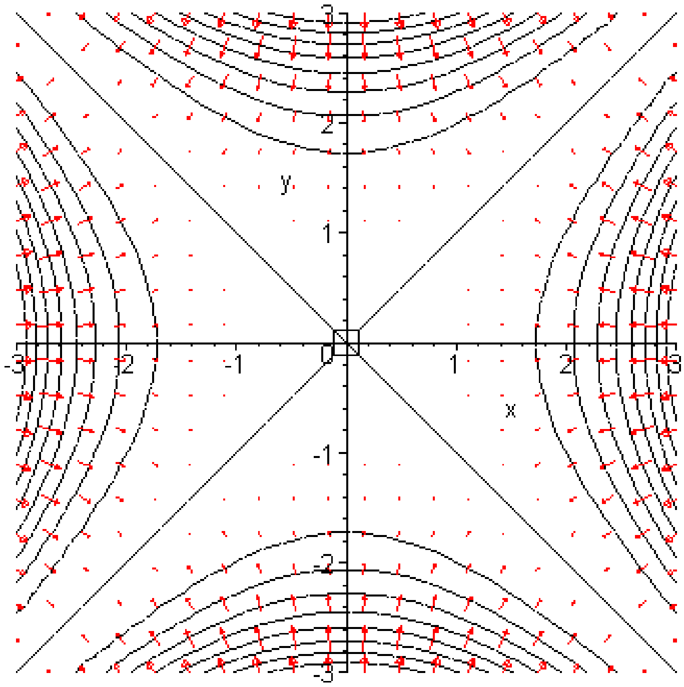
3. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is een ellips (en geen cirkel): $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{c})^2} = 1\}$.

4. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal c: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = c^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.

5. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
   De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal c: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = c^2\}$. De niveaulijn N_1 die behoort bij niveau 1 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 1, de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 2.

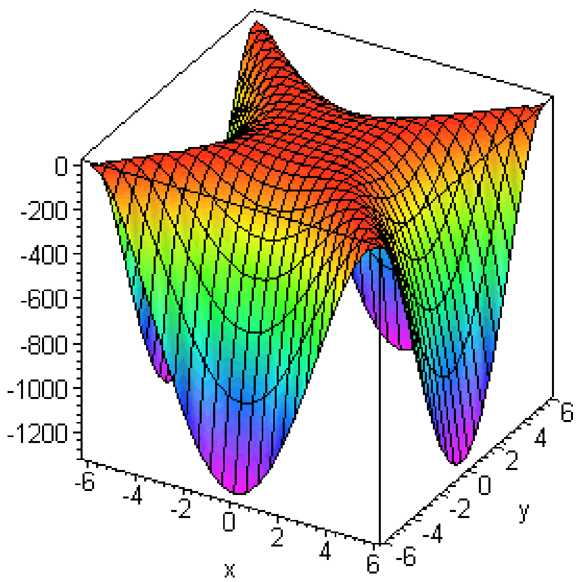
Vraag 19

Gegeven de niveaulijnen en het gradiëntvectorveld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Welke grafiek hoort er bij? In onderstaande grafieken hebben punten op dezelfde hoogte dezelfde kleur.

Correct antwoord



Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

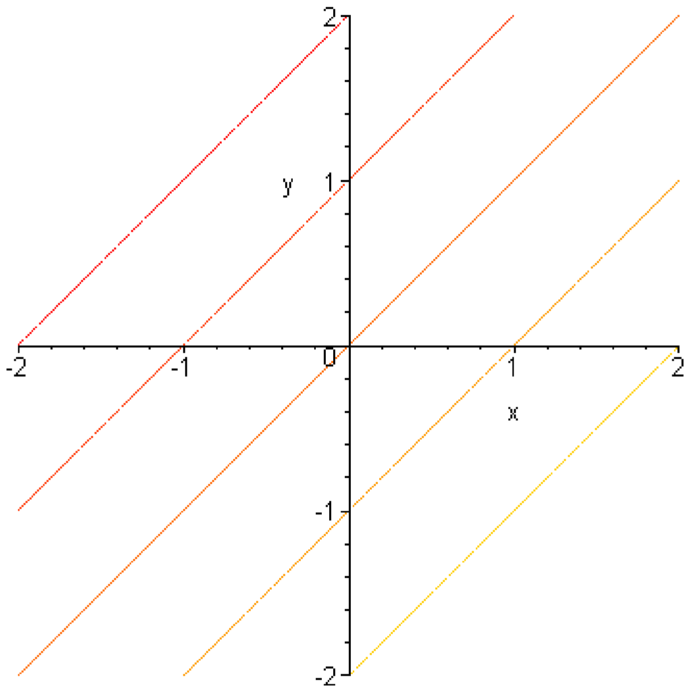
Let op: $(0, 0)$ is geen zadelpunt. Als je in gelijk welke richting van $(0, 0)$ wegloopt, daalt de functiewaarde. Dus de functie bereikt in $(0, 0)$ een (lokaal) maximum. Enkel alternatief 4 en 5 blijven over. Bij alternatief 4 zijn de niveaulijnen allemaal cirkels.

Info: Niveaulijnen en gradientvectorveld van een functie in 2 veranderlijken, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 1984

Vraag 20

Gegeven de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$. Teken de niveaulijnen bij niveau -2, -1, 0, 1 en 2. Welke niveaulijnen horen bij deze functie (niveau -2 is rood, niveau -1 is donkeroranje, niveau 0 is oranje, niveau 1 is lichtoranje, niveau 2 is geel)?

Correct antwoord



Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor $c \in \mathbb{R}$ geldt dat de niveaulijn N_c die behoort bij niveau c gelijk is aan

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

Nu is

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow x - y = c \Leftrightarrow y = x - c.$$

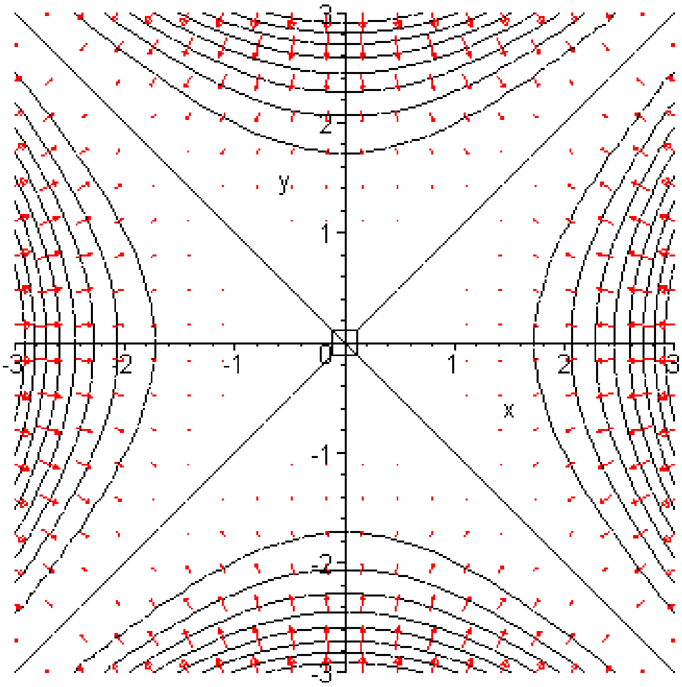
Dus is $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - c\}$ de rechte met als vergelijking $y = x - c$.
N_0 is de rechte met als vergelijking $y = x$. Deze gaat bijvoorbeeld door de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
N_1 is de rechte met als vergelijking $y = x - 1$. Deze gaat bijvoorbeeld door de punten $(0, -1)$ en $(1, 0)$.
N_2 is de rechte met als vergelijking $y = x - 2$. Deze gaat bijvoorbeeld door de punten $(0, -2)$ en $(1, -1)$.

Alternatief 1 is zeker fout, want daar zijn de niveaulijnen cirkels. Alternatief 2 en 3 zijn ook fout, want de niveaulijnen zijn daar rechten evenwijdig met de rechte met als vergelijking $y = -x$. Alternatief 5 is ook fout, want de positie van N_2 (en N_{-2}) is verkeerd.

Info: Niveaulijnen van een functie in 2 veranderlijken, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 1987

Vraag 21

Gegeven de niveaulijnen en het gradiëntvectorveld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

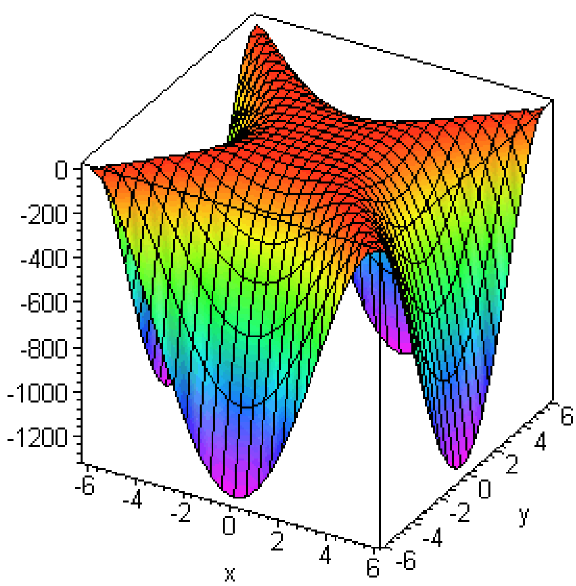
De functie bereikt in de oorsprong een globaal maximum.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

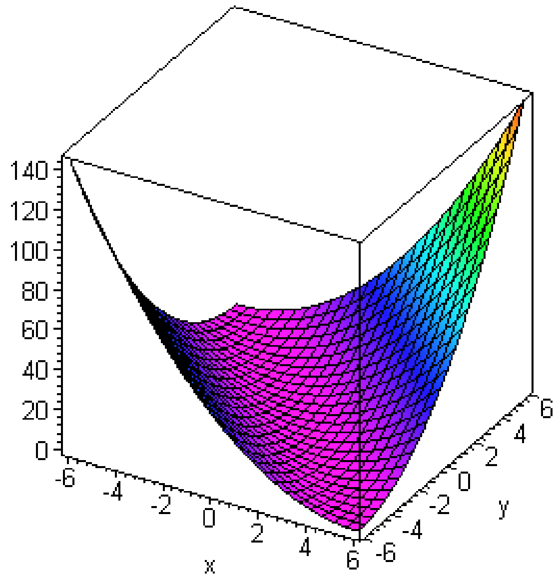
Let op: $(0, 0)$ is geen zadelpunt. Als je in gelijk welke richting van $(0, 0)$ wegloopt, daalt de functiewaarde of blijft ze hetzelfde. Merk op dat f in de punten op de rechte met vergelijking $y = x$ en in de punten op de rechte met vergelijking $y = -x$ dezelfde functiewaarde aanneemt als in $(0, 0)$. Dus de functie f bereikt in de oorsprong $(0, 0)$ een lokaal maximum, maar ook een globaal maximum. Hieronder vind je de grafiek van f.



Vraag 22

Gegeven de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x + y)^2$. Welke grafiek hoort bij deze functie?
Tip: Teken de niveaulijnen bij bijvoorbeeld niveau -2, -1, 0, 1 en 2.

Correct antwoord



Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

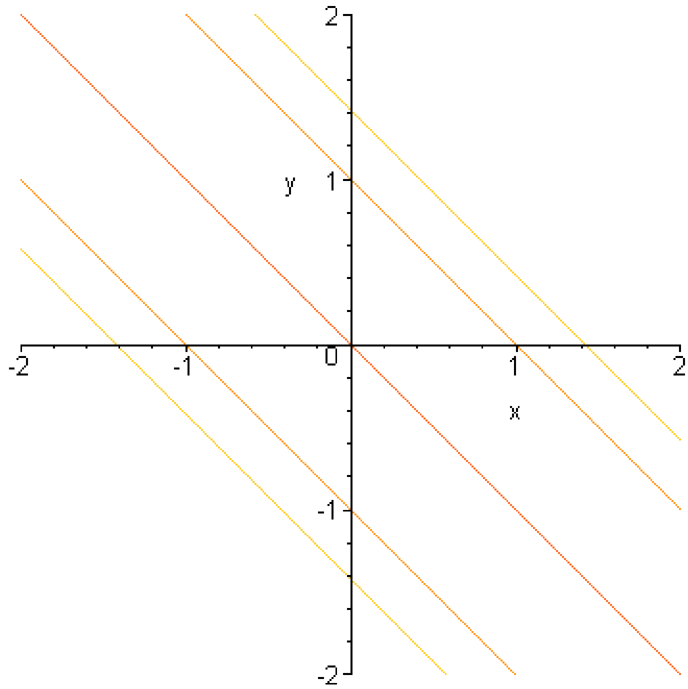
Voor $c \in \mathbb{R}$ geldt dat de niveaulijn N_c die behoort bij niveau c gelijk is aan

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

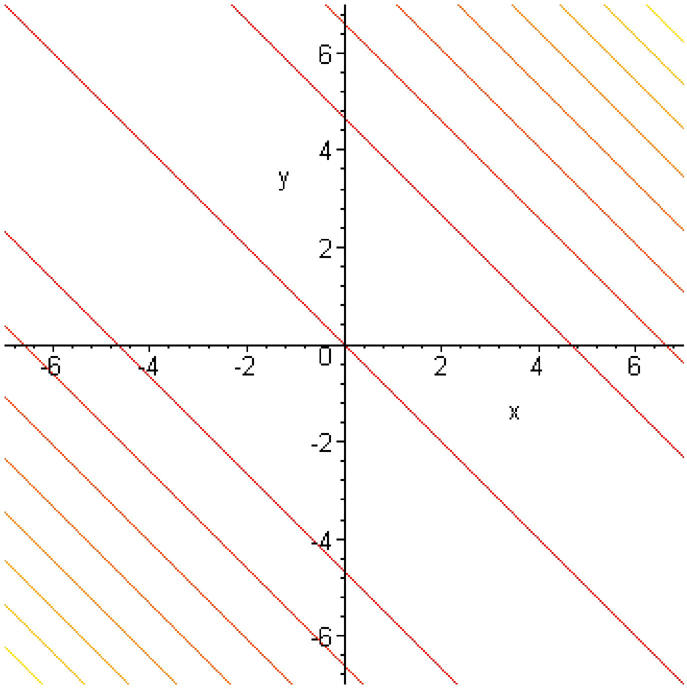
Nu is

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow (x + y)^2 = c.$$

Voor $c < 0$ is $N_c = \emptyset$, want $(x + y)^2 \geq 0$.
Voor $c = 0$ geldt $(x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.
Dus in dit geval is $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$ de rechte met als vergelijking $y = -x$. Deze rechte gaat bijvoorbeeld door $(0, 0)$ en $(1, -1)$.
Voor $c > 0$ geldt $(x + y)^2 = c \Leftrightarrow x + y = \sqrt{c}$ of $x + y = -\sqrt{c}$.
Dus in dit geval is $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = -\sqrt{c}\}$. Dit is de unie van de rechte met als vergelijking $y = -x + \sqrt{c}$ en de rechte met als vergelijking $y = -x - \sqrt{c}$.
Dus N_1 is de unie van de rechte met als vergelijking $y = -x+1$ en de rechte met als vergelijking $y = -x - 1$.
Dus N_2 is de unie van de rechte met als vergelijking $y = -x+\sqrt{2}$ en de rechte met als vergelijking $y = -x - \sqrt{2}$.
Hieronder vind je de niveaulijnen van f (niveau 0 is oranje, niveau 1 is lichtoranje, niveau 2 is geel).



Nog wat meer niveaulijnen vind je hieronder (de niveaus nemen steeds met dezelfde waarde toe). Je ziet dat als je je beweegt volgens bijvoorbeeld de eerste bissectrice, de functiewaarden steeds sneller stijgen. Dus de grafiek wordt daar zeer steil.



Vraag 23

Wanneer men in de context van limieten van functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zegt dat $0 \times (+\infty)$ een *onbepaalde vorm* is, dan bedoelt men

Correct antwoord

als $\lim_a f = 0$ en $\lim_a g = +\infty$, dan kan in het algemeen niets besloten worden over het bestaan en de eventuele waarde van $\lim_a fg$

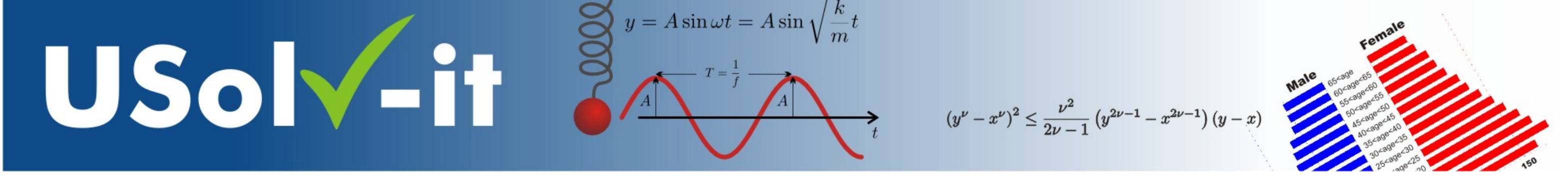
Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Een *onbepaalde vorm* wijst op een situatie waarin men in het algemeen geen sluitende uitspraak kan doen, noch over het bestaan, noch over de eventuele waarde van de limiet.

Info: auteur: Frederik Houpline, Johan Quaegebeur, bron: Examenvraag 1ETEW - K.U.Leuven, id: 999



Vraag 24

Bestaat de volgende limiet? Zo ja, wat is de gevonden waarde?

$$\lim_{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x} \cos x$$

Correct antwoord

Deze limiet bestaat niet.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Aangezien

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\, x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\, x = -\infty$$

zullen we onderscheid maken tussen linker- en rechterlimiet voor de berekening.

- Voor $x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}$ gaan we als volgt te werk :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \exp(\operatorname{tg} x)\cos x &\to +\infty \times 0 \\
&= \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\operatorname{tg}\, x)}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{+\infty}{+\infty} \\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\operatorname{tg}\, x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} \\
&= \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\operatorname{tg}\, x)}{\sin x} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

- Voor $x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2}$ zien we direct dat $\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} \exp(\operatorname{tg}\, \mathrm{x}) \cos x = 0$.

Aangezien de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet bestaat de gevraagde limiet niet.

Info: auteur: Paul Igodt, Bram De Rock, id: 1011

Vraag 25

Ga na of de volgende limiet bestaat en bereken desgevallend:

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x+1)^3}.$$

Correct antwoord

$+\infty$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De limiet

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x+1)^3}$$

leidt tot het onbepaalde geval $\frac{0}{0}$. Het punt -1 is derhalve nulpunt van de veeltermen die in teller en noemer van deze breuk staan. We proberen dus maximaal te vereenvoudigen. Aangezien $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ is

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x+1)^3} = \lim_{-1} \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \to \frac{2}{0}.$$

Een tekenonderzoek van teller en noemer dringt zich op. Nu is $(x+1)^2$ altijd positief. Bijgevolg is

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x+1)^3} = +\infty$$

Info: auteur: Paul Igodt, Bram De Rock, id: 1012

Vraag 26

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) =$$

Correct antwoord

$$-\infty$$

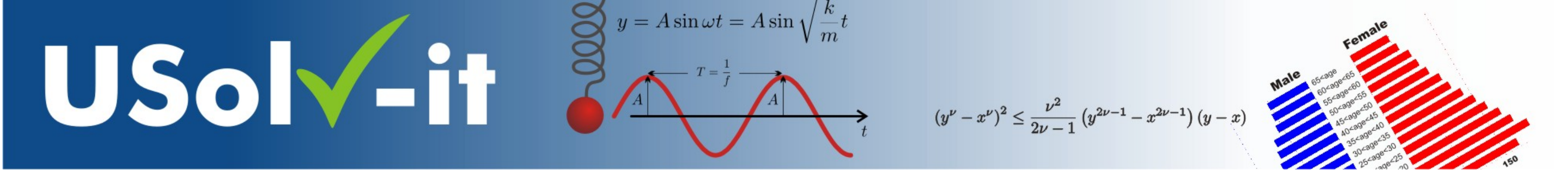
Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{2x-1}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} (2x-1) \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \\ &= -\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1028



Vorige Volgende

Vraag 27

De rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een convergente rij met limiet a. Welke uitspraak is <u>niet noodzakelijk</u> waar?

Correct antwoord

$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :\mid x_n - a \mid < \varepsilon$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Uitspraak 3 is niet waar. We tonen dit aan met een tegenvoorbeeld.
Neem de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.
Deze rij convergeert naar 0.
Aangezien in de derde uitspraak de kwantor $\forall$ bij ε staat, mogen we aan ε een willekeurige waarde toekennen. Stel vb $\varepsilon = 0,01$. Ook n_0 mogen we willekeurig kiezen, stel vb $n_0 = 5$.
Als uitspraak 3 waar is, moet er met de gekozen ε en n_0 gelden :

$$\forall n \geq 5 :\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0,01.$$

Maar als $n = 10$, dan klopt dit niet !
Dus is uitspraak 3 fout.

Info: auteur: Tanja Costermans, Frederik Houpline, id: 1375

Vraag 28

Als $f(3) = 4$, $f'(3) = 12$ en $g(x) = \sqrt{f(x)}$, wat is dan $g'(3)$?

Correct antwoord

3

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

We vinden de oplossing door de kettingregel toe te passen.
Eerst de afgeleide zoeken in een willekeurige x :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

Dan pas $x = 3$ invullen :

$$\Longrightarrow \quad g'(3) = \frac{1}{2\sqrt{f(3)}} f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} 12 = 3.$$

Info: auteur: Tanja Costermans, Paul Igodt, bron: Oefenmateriaal 1ETEW - K.U.Leuven/KULAK, id: 1021

Vraag 29

Beschouw de volgende functie:

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1-x}{x}\, e^x .$$

Dan geldt er:

Correct antwoord

f heeft geen extrema maar wel een buigpunt.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Na enige berekening vinden we als eerste afgeleide

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(-x^2 + x - 1)$$

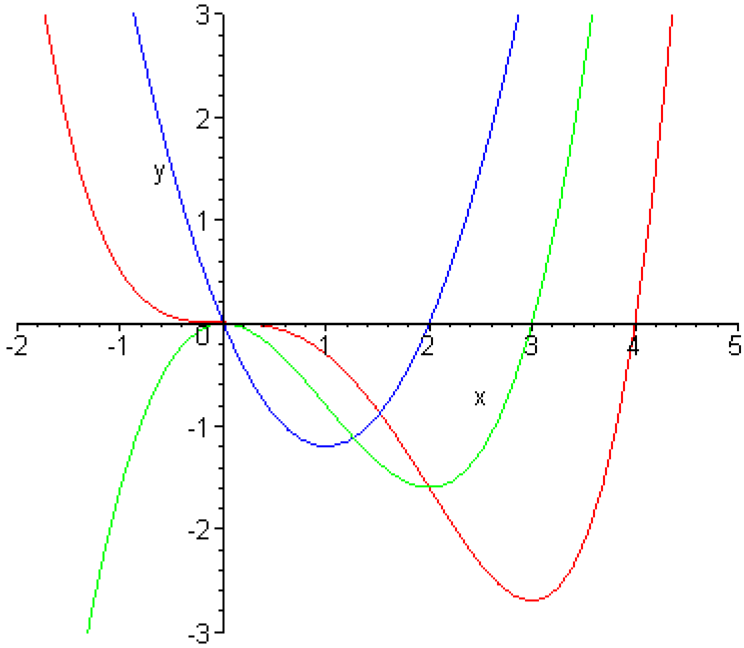
Nader onderzoek leert dat géén van de factoren uit de teller van deze uitdrukking nulpunten heeft. Er zijn evenmin randpunten waar extrema worden bereikt en bovendien is f duidelijk een afleidbare functie.
Verder cijferen geeft de tweede afgeleide

$$\frac{e^x}{x^3}(-x^3 + x^2 - 2x + 2)$$

Het enige reële nulpunt, 1, van $-x^3 + x^2 - 2x + 2 = -(x-1)(x^2+2)$ komt in aanmerking als buigpunt en is er ook één daar de tweede afgeleide in 1 van teken wisselt.
De tweede mogelijkheid is juist, geen extrema, wel een buigpunt.

Vraag 30

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is rood, die van haar afgeleide f' is groen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De grafiek van f is rood, die van f' is groen en die van f'' is blauw. We controleren of dit kan. We zien dat f' negatief (of 0) is tot 3 en daarna positief. Dan zou f dalend moeten zijn tot 3 en daarna stijgend. Verder is f'' positief tot 0, daarna negatief tot 2 en daarna weer positief. Dan zouden 0 en 2 buigpunten moeten zijn van f en de holle zijde van de grafiek van f zou vóór 0 naar boven gericht moeten zijn, tussen 0 en 2 naar onder gericht en daarna weer naar boven gericht. Dit klopt allemaal!

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2192

Vraag 31

Bepaal de buigpunten van de functie $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Correct antwoord

$(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$ en $(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ geldt:

- $f'(x) = (\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$
- $f''(x) = (-2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2})' = 4x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = (4x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

Vervolgens bereken we de nulpunten van de tweede afgeleide:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 \iff (4x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} &= 0 \\
4x^2 - 2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{2}{4} = \frac{2}{2} \\
x = \sqrt{\frac{2}{2}} \quad &\vee \quad x = -\sqrt{\frac{2}{2}}.
\end{aligned}
$$

De tekentabel van $f''(x)$ is gelijk aan:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{2}}$		$\sqrt{\frac{2}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$	$\cap$	$\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$	$\cup$	

Besluit:
De buigpunten van de gegeven functie zijn $(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$ en $(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$.

Info: differentiaalrekenen - vraag 37, auteur: Kristien Wauters, bron: Oefeningen wiskunde - Karl Hoefkens - KHK, id: 4658

Vraag 32

Bepaal de buigpunten van de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$.

Correct antwoord

$$\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$ geldt:

- $y' = (\frac{\ln x}{x})' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln x = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$
- $y'' = (\frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x))' = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cdot (1 - \ln x) = -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x)$

Vervolgens bereken we het nulpunt van de tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} y'' = 0 \iff -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x) &= 0 \\ 3 - 2\ln x &= 0 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ x &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

De tekentabel van y'' is gelijk aan:

x	$-\infty$		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$	$\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}$	$\cup$	

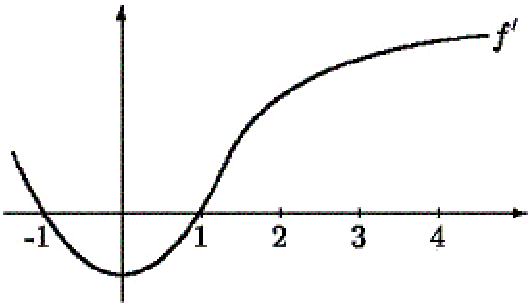
Besluit:

Het buigpunt van de gegeven kromme is $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Info: differentiaalrekenen - vraag 38, auteur: Kristien Wauters, bron: Oefeningen wiskunde - Karl Hoefkens - KHK, id: 4659

Vraag 33

Van een afleidbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is hier de grafiek van de afgeleide f' getekend. Wat kun je besluiten over f?



Correct antwoord

$f(2) - f(1) \leq f(3) - f(2)$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt dat er een $c_1 \in]1,2[$ en een $c_2 \in]2,3[$ bestaat zo dat

$$f(2) - f(1) = f'(c_1) \quad \text{en} \quad f(3) - f(2) = f'(c_2).$$

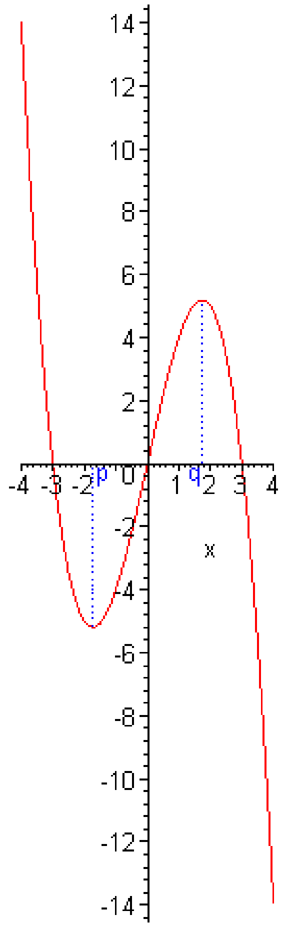
Op de grafiek van f' zien we dat $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Uitspraak 2 is dus correct.
Het is bovendien niet moeilijk om te argumenteren waarom uitspraken 1 en 3 fout zijn (doe dit!).

Info: auteur: Johan Quaegebeur, bron: proef97, id: 1529

Vorige Volgende

Vraag 34

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie. Gegeven is de grafiek van de afgeleide van f.



Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Jouw antwoord

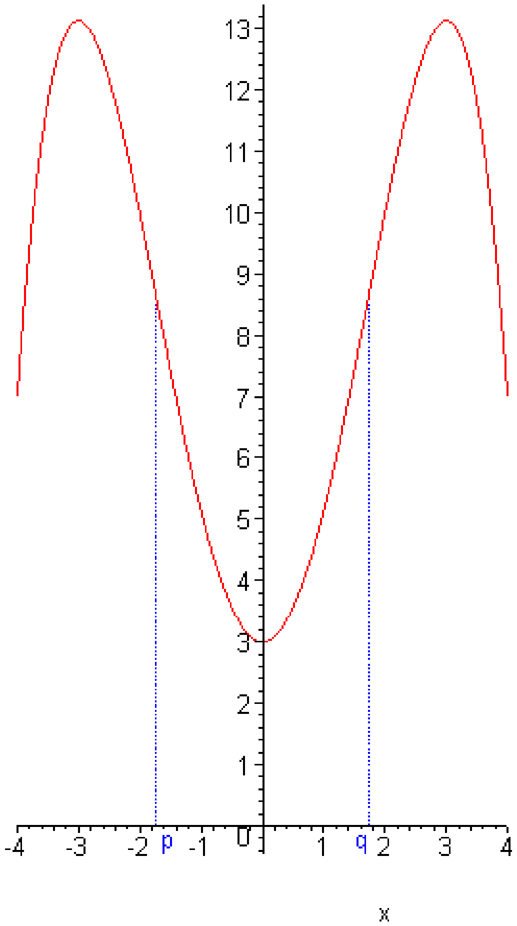
Geen antwoord

Oplossing

We maken het tekenonderzoek van f':

x		-3		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

De functie f zou er als volgt kunnen uitzien:



De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Vraag 35

Gegeven is de vraagfunctie $D(p) = -ap^2 + b$, afhankelijk van de prijs p, met $a > 0$ en $b > 0$. In welk interval is de prijselasticiteit van de vraag elastisch, m.a.w. in welk interval is $|\frac{ED}{Ep}(p)| \geq 1$? Beschouw uiteraard alleen economisch relevante gebieden (dus met $p \geq 0$ en $q = D(p) \geq 0$).

Correct antwoord

$[\sqrt{\frac{b}{3a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}[$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Bereken de elasticiteitsfunctie:

$$\frac{ED}{Ep}(p) = p\frac{D'(p)}{D(p)} = \frac{2ap^2}{ap^2 - b}.$$

We onderzoeken eerst waar $|\frac{ED}{Ep}(p)| = 1$. Omdat de elasticiteit van een (dalende) vraagfunctie negatief is, moeten we dus nagaan waar $\frac{ED}{Ep}(p) = -1$. Dit geeft

$$\frac{2ap^2}{ap^2 - b} = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad p^2 = \frac{b}{3a},$$

of $p = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ (want $p > 0$).

$D(p)$ is gedefinieerd in $[0, \sqrt{\frac{b}{a}}]$.

Met moet nu nog nagaan waar $|\frac{ED}{Ep}(p)| \geq 1$, of dus $\frac{ED}{Ep}(p) \leq -1$. Dit geeft

$$\frac{2ap^2}{ap^2 - b} + 1 \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3ap^2 - b}{ap^2 - b} \leq 0,$$

of dus $3ap^2 - b \geq 0$ (want de noemer is negatief). Het gevraagde interval is dus $[\sqrt{\frac{b}{3a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}[$.

Info: auteur: Joris Van der Jeugt, id: 3530

Vraag 36

Bepaal de buigpunten van de functie $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Correct antwoord

$(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$ en $(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ geldt:

- $f'(x) = (\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$
- $f''(x) = (-2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2})' = 4x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = (4x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

Vervolgens bereken we de nulpunten van de tweede afgeleide:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 \iff (4x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} &= 0 \\
4x^2 - 2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{2}{4} = \frac{2}{2} \\
x = \sqrt{\frac{2}{2}} \quad &\vee \quad x = -\sqrt{\frac{2}{2}}.
\end{aligned}
$$

De tekentabel van $f''(x)$ is gelijk aan:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{2}}$		$\sqrt{\frac{2}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$	$\cap$	$\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$	$\cup$	

Besluit:
De buigpunten van de gegeven functie zijn $(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$ en $(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\mathrm{e}^{-1}})$.

Info: differentiaalrekenen - vraag 37, auteur: Kristien Wauters, bron: Oefeningen wiskunde - Karl Hoefkens - KHK, id: 4658

Vraag 37

Bepaal de buigpunten van de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$.

Correct antwoord

$$\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Voor de kromme $y = \frac{\ln x}{x}$ geldt:

- $y' = (\frac{\ln x}{x})' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln x = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$
- $y'' = (\frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x))' = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cdot (1 - \ln x) = -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x)$

Vervolgens bereken we het nulpunt van de tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} y'' = 0 \iff -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - 2\ln x) &= 0 \\ 3 - 2\ln x &= 0 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ x &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

De tekentabel van y'' is gelijk aan:

x	$-\infty$		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$	$\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}$	$\cup$	

Besluit:

Het buigpunt van de gegeven kromme is $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Info: differentiaalrekenen - vraag 38, auteur: Kristien Wauters, bron: Oefeningen wiskunde - Karl Hoefkens - KHK, id: 4659

Vraag 38

Beschouw de volgende functie:

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1-x}{x}\, e^x.$$

Dan geldt er:

Correct antwoord

f heeft geen extrema maar wel een buigpunt.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Na enige berekening vinden we als eerste afgeleide

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(-x^2 + x - 1)$$

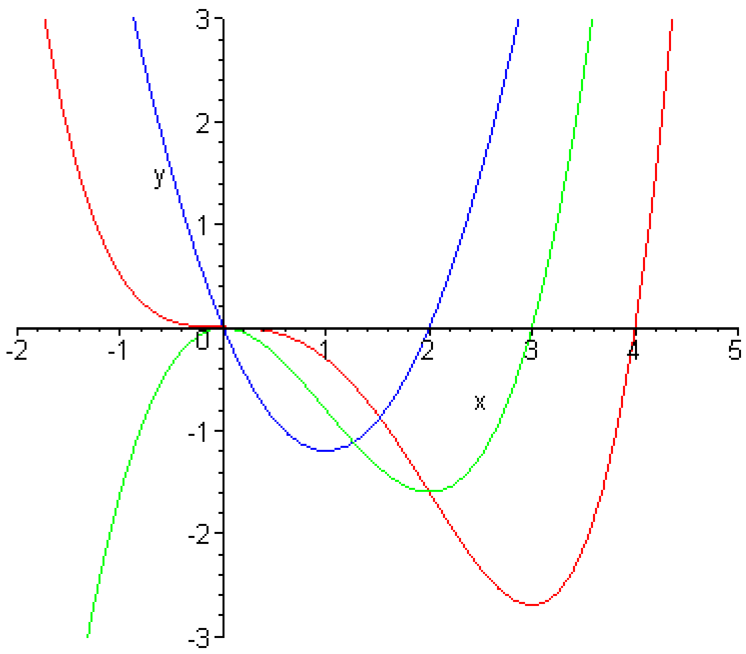
Nader onderzoek leert dat géén van de factoren uit de teller van deze uitdrukking nulpunten heeft. Er zijn evenmin randpunten waar extrema worden bereikt en bovendien is f duidelijk een afleidbare functie.
Verder cijferen geeft de tweede afgeleide

$$\frac{e^x}{x^3}(-x^3 + x^2 - 2x + 2)$$

Het enige reële nulpunt, 1, van $-x^3 + x^2 - 2x + 2 = -(x-1)(x^2+2)$ komt in aanmerking als buigpunt en is er ook één daar de tweede afgeleide in 1 van teken wisselt.
De tweede mogelijkheid is juist, geen extrema, wel een buigpunt.

Vraag 39

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is rood, die van haar afgeleide f' is groen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

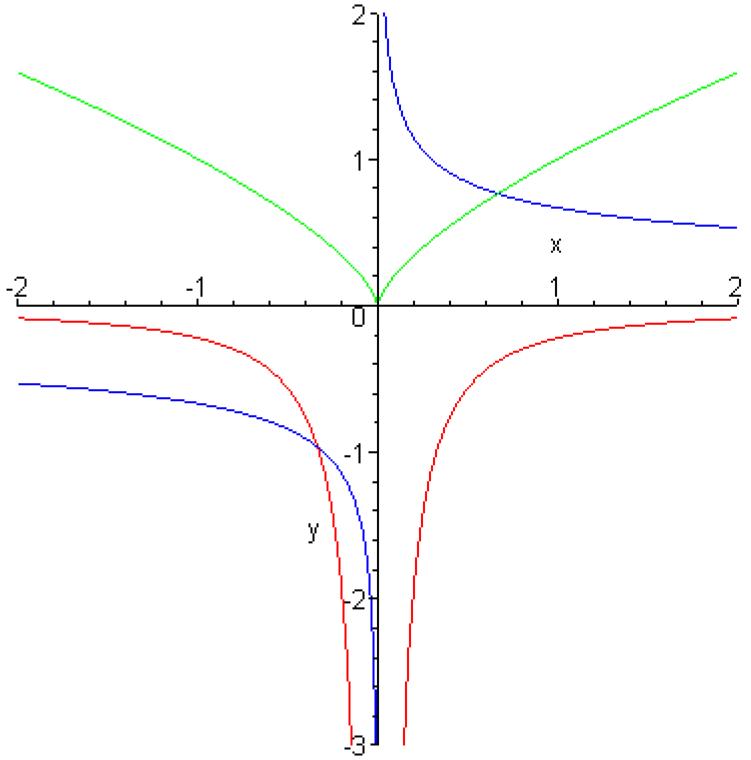
Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De grafiek van f is rood, die van f' is groen en die van f'' is blauw. We controleren of dit kan. We zien dat f' negatief (of 0) is tot 3 en daarna positief. Dan zou f dalend moeten zijn tot 3 en daarna stijgend. Verder is f'' positief tot 0, daarna negatief tot 2 en daarna weer positief. Dan zouden 0 en 2 buigpunten moeten zijn van f en de holle zijde van de grafiek van f zou vóór 0 naar boven gericht moeten zijn, tussen 0 en 2 naar onder gericht en daarna weer naar boven gericht. Dit klopt allemaal!

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2192

Vraag 40

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is groen, die van haar afgeleide f' is blauw.

Jouw antwoord

Geen antwoord

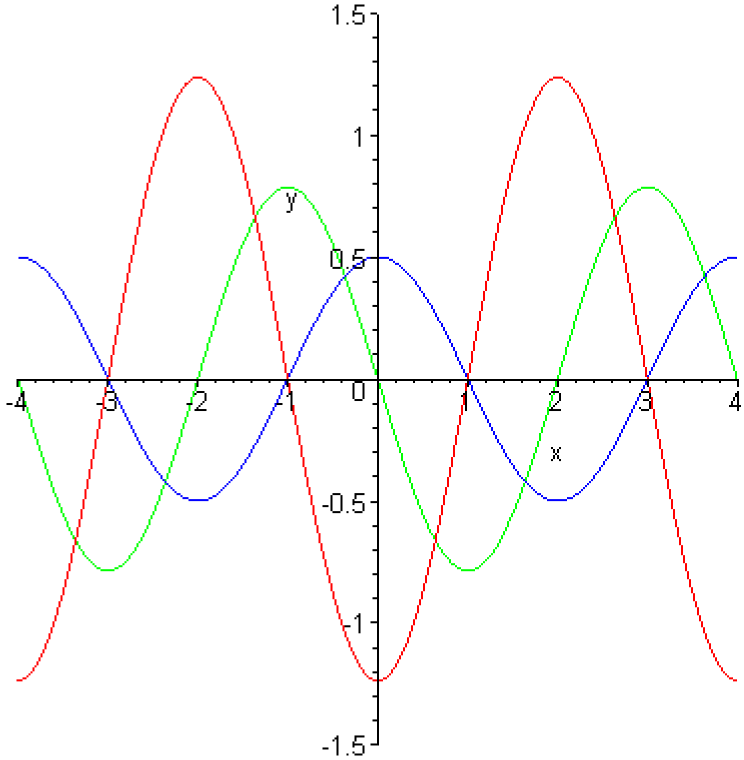
Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De grafiek van f is groen, die van f' is blauw en die van f'' is rood. We controleren of dit kan. We zien dat f' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en positief op $]0, \infty[$. Dan zou f dalend moeten zijn tot 0 en daarna stijgend. Er zou geen raaklijn aan de grafiek van f in $(0, f(0))$ mogen bestaan. Verder is duidelijk dat f'' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en negatief op $]0, \infty[$. Dan zou de holle zijde van de grafiek van f vóór 0 en achter 0 naar beneden gericht moeten zijn. Dit klopt allemaal!

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2195

Vraag 41

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is blauw, die van haar afgeleide f' is groen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

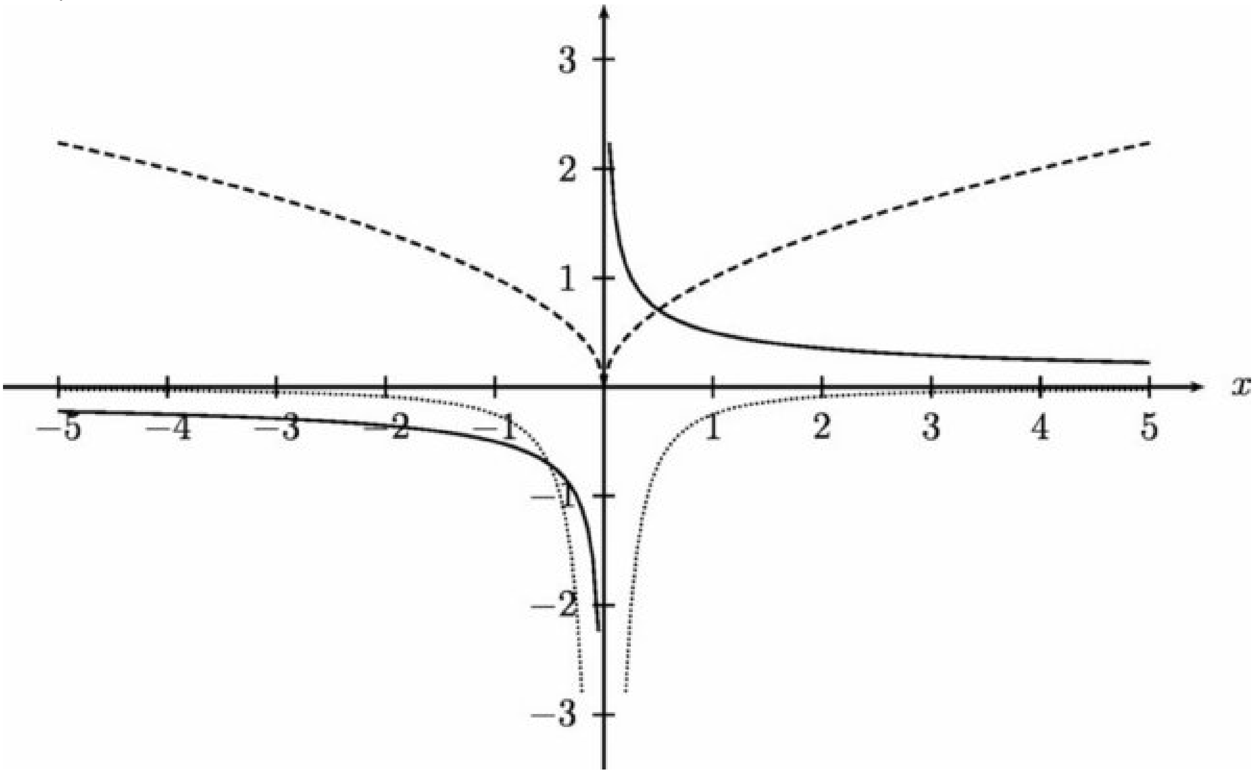
Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
De functie met de rode grafiek is stijgend tot -2. De afgeleide moet dan positief zijn tot -2. Er is geen enkele van de andere functies die hieraan voldoet. Dus de grafieken van f en van f' kunnen niet rood zijn. (Waarom kan ook de grafiek van f' niet rood zijn?)
De functie met de groene grafiek is dalend tot -3. De afgeleide moet dan negatief zijn tot -3. Hieraan voldoet enkel de functie met de rode grafiek. De holle zijde van de functie met de groene grafiek is naar boven gericht op het interval $]-, -2[$. Dan zou de tweede afgeleide positief moeten zijn op dit interval. De functie met de blauwe grafiek (de enige overblijvende) voldoet hier niet aan.
De grafiek van f zou dus blauw moeten zijn, de grafiek van f' groen en de grafiek van f'' rood. Maak zelf het tekenonderzoek van deze functies om te controleren dat alles nu klopt (grafiek boven de X-as $\Rightarrow +$ teken, grafiek onder de X-as $\Rightarrow -$ teken, snijpunt met de X-as $\Rightarrow$ nulpunt).

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2196

Vraag 42

In onderstaande figuur zijn de grafieken van een functie f geschetst, haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f''. Welke kromme correspondeert met de grafiek van f, welke met die van f'?



Correct antwoord

De grafiek van f is een streepjeslijn, die van haar afgeleide f' is een volle lijn.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.
Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.
Het correcte antwoord is:
De grafiek van f is een streepjeslijn, die van f' is een volle lijn en die van f'' is een stippellijn. We zien dat f' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en positief is op $]0, \infty[$. Dan zou f dalend moeten zijn bij strikt negatieve x-waarden en stijgend bij strikt positieve x-waarden. Er zou geen raaklijn mogen bestaan aan de grafiek van f in $(0, f(0))$. Verder is duidelijk dat f'' negatief is op $]-\infty, 0[$, niet bestaat in 0 en ook negatief is op $]0, \infty[$. Dan zou de holle zijde van de grafiek van f naar beneden gericht moeten zijn aan beide zijden van de x-as. Hieraan is allemaal voldaan door de functies f en f' van alternatief 1.

Info: Functieverloop van een functie m.b.v de eerste en de tweede afgeleide, auteur: Kathleen Hoornaert, Kaat Zeeuwts, id: 7236

Vraag 43

Een productiefunctie Q is gegeven in functie van de arbeid (L) en het geinvesteerde kapitaal (K) als $Q = 10K^{0.8}L^{0.2}$. Hoeveel van de volgende uitspraken zijn correct ?

- $< \nabla Q(K, L), (K, L) >= Q(K, L)$
- De richtingsafgeleide van $Q(K, L)$ in de richting $(1, 0)$ is $8K^{-0.2}L^{0.2}$.
- $\mathrm{D}^2_{K,L}Q(K, L) = 1.6K^{-0.2}L^{-0.8}$
- Bij toenemende waarde van K stijgt de marginale productiviteit van de arbeid.

Correct antwoord

4

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Observeer vooreerst dat de gegeven productiefunctie Q homogeen is van graad 1.
Voor de eerste uitspraak beschouwen we

$$< \nabla Q(K, L), (K, L) >= K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Door gebruik te maken van de stelling van Euler over homogene functies, kunnen we dus besluiten dat de eerste uitspraak correct is.
De richtingsafgeleide van $Q(K, L)$ in de richting van $(1, 0)$ is precies de partiële afgeleide van Q naar de eerste variabele (variabele K). We vinden dus

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 8K^{-0.2}L^{0.2}$$

zodat we zien dat ook de tweede uitspraak correct is.
Leiden we deze partiële afgeleide nogmaals af naar L, dan zien we dat ook uitspraak 3 correct is.
De marginale productiviteit van de arbeid is gedefinieerd als $D_L Q(K, L)$. Nu is

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = 2K^{0.8}L^{-0.8},$$

en dit is een *stijgende* functie in K. Ook uitspraak 4 is dus correct.

Info: auteur: Frederik Houpline, Paul Igodt, bron: Examenvraag 1ETEW- K.U.Leuven, id: 996

Vraag 44

Beschouw de volgende functie:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

Dan is $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ gelijk aan

Correct antwoord

$-2\dfrac{x}{y^2} - 2\dfrac{y}{x^2}$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Het antwoord volgt na de berekening

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y}{x}\right) \\ &= -2\frac{x}{y^2} - 2\frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

Dit is de vierde keuzemogelijkheid.

Info: auteur: Wim Malfait, id: 1903

Vraag 45

Gegeven $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (e^t, 2e^{-t}, e^t + e^{-t})$.
Bereken $(g \circ f)(0)$ en bereken vervolgens $(g \circ f)'(0)$ met de kettingregel.

Correct antwoord

$(g \circ f)(0) = 8$ en $(g \circ f)'(0) = -2$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

We berekenen dat $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1, 2, 2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.
Om $(g \circ f)'(0)$ te berekenen gebruiken we de kettingregel voor het afleiden van een samengestelde functie van meerdere veranderlijken.

$$(g \circ f)'(0) = D_1 g(f(0)) \cdot f_1'(0) + D_2 g(f(0)) \cdot f_2'(0) + D_3 g(f(0)) \cdot f_3'(0),$$

met f_1, f_2 en f_3 de componentfuncties van f.
Nu is $D_1 g(x, y, z) = y + z$, $D_2 g(x, y, z) = x + z$, $D_3 g(x, y, z) = y + x$, $f_1'(t) = e^t$, $f_2'(t) = -2e^{-t}$, $f_3'(t) = e^t - e^{-t}$ en $f(0) = (1, 2, 2)$. Dus vinden we dat

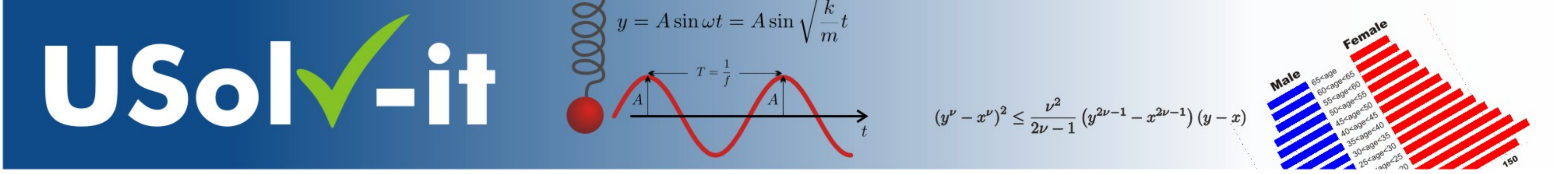
$$(g \circ f)'(0) = (2 + 2) \cdot 1 + (1 + 2) \cdot (-2) + (2 + 1) \cdot (1 - 1) = -2.$$

Ter controle kunnen we ook $(g \circ f)(t)$ berekenen :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(t) &= g(e^t, 2e^{-t}, e^t + e^{-t}) \\
&= e^t \cdot 2\,e^{-t} + 2\,e^{-t} \cdot (e^t + e^{-t}) + (e^t + e^{-t}) \cdot e^t = 2 + 2 + 2\,e^{-2t} + e^{2t} + 1 \\
&= 5 + 2\,e^{-2t} + e^{2t}.
\end{aligned}$$

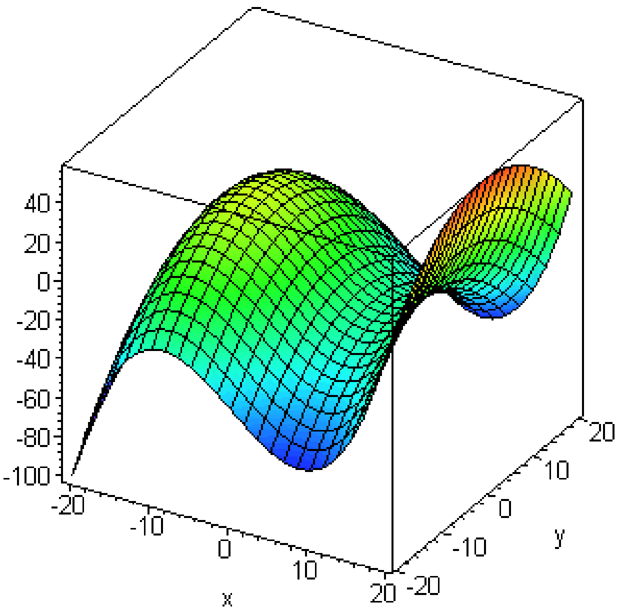
Dan volgt dat $(g \circ f)(0) = 8$ en $(g \circ f)'(t) = -4\,e^{-2t} + 2\,e^{2t}$ en dus ook $(g \circ f)'(0) = -2$.

Info: afleiden samengestelde functie, auteur: Lutgarde Beernaert, Kathleen Hoornaert, bron: Oefeningenbundel analyse 1 ste kan burg.ir. K.U.Leuven, id: 2003



Vraag 46

Gegeven de grafiek van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

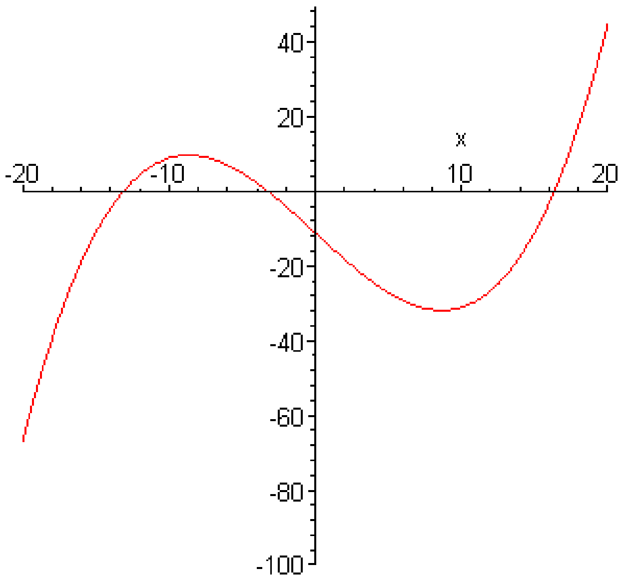


De grafiek van de functie

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x) = f(x, -10)$$

is

Correct antwoord

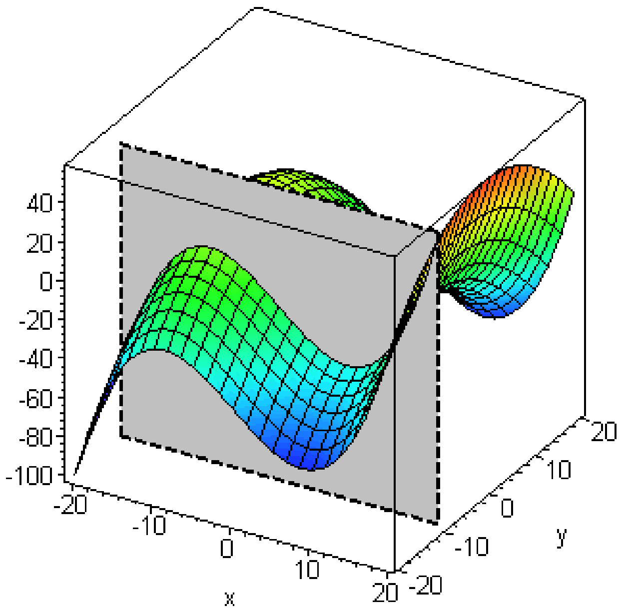


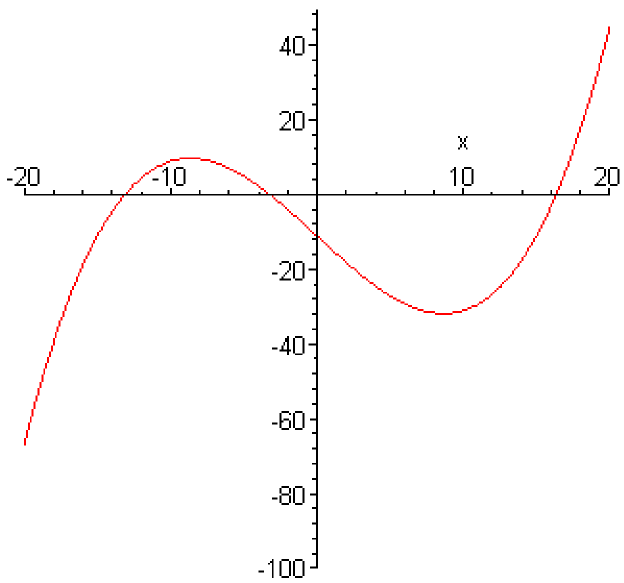
Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

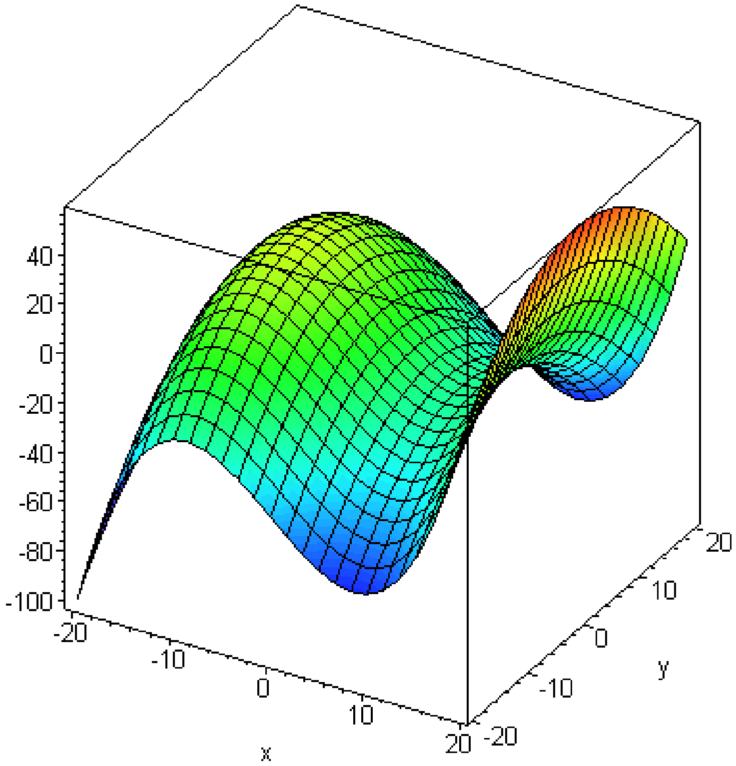
Als de y-coördinaat vastgehouden wordt op -10 en de x-coördinaat mag variëren, dan bewegen we ons in het domein (in het XY-vlak) op de rechte met vergelijking $y = -10$. De kromme die de grafiek van de functie f_1 beschrijft, verkrijgen we door de grafiek van f te snijden met het vlak met vergelijking $y = -10$.





Vraag 47

Gegeven de grafiek van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Correct antwoord

$$D_1 f(-5, -10) < 0$$

Jouw antwoord

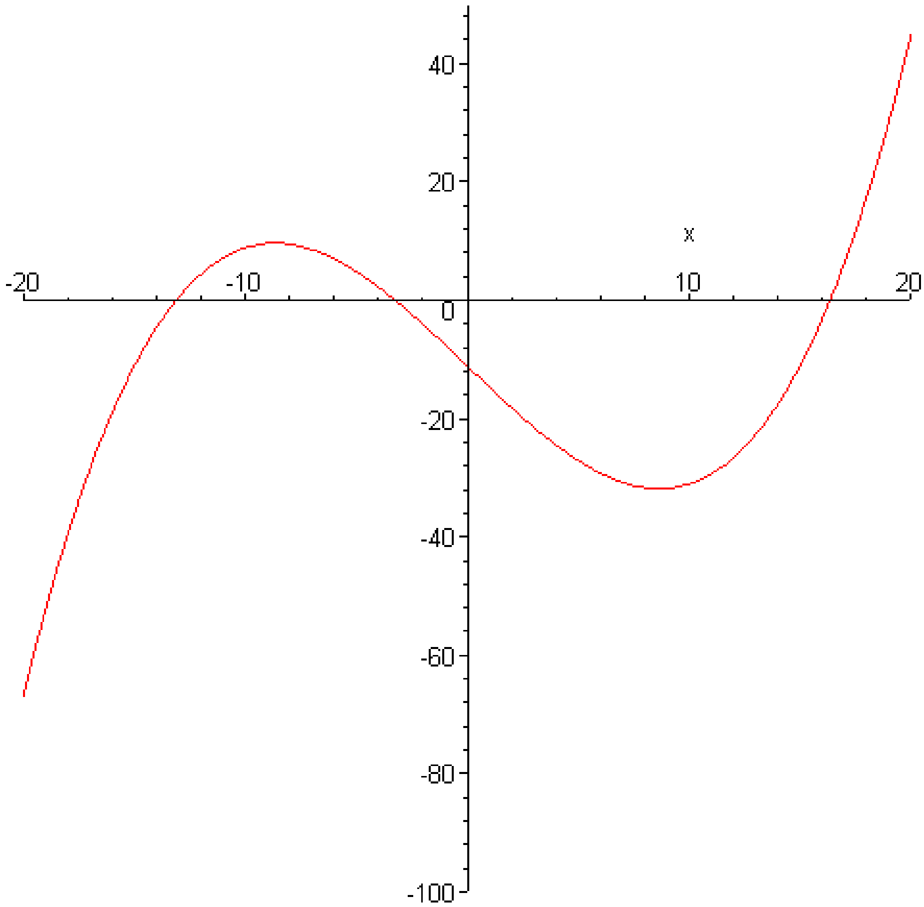
Geen antwoord

Oplossing

$D_1 f(-5,-10)$ is gelijk aan $f_1'(-5)$ met f_1 de functie verkregen uit f door de y-coördinaat vast te houden op -10 en de x-coördinaat te laten variëren:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \quad \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x) = f(x,-10).$$

De grafiek van f_1 is



De functie f_1 is dalend in -5, dus is $D_1 f(-5,-10) = f_1'(5) < 0$.

Vraag 48

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde.
Veronderstel dat $D_1 f(3,0) = 1$, $D_2 f(3,0) = 0$ en $D^2_{22} f(3,0) = -3$.
Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(t^2 + 3, t)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal maximum in $t = 0$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Gegeven is dat $g(t) = f(t^2 + 3, t)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(t^2 + 3, t)2t + D_2 f(t^2 + 3, t)1.$$

De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left(D^2_{11} f(t^2+3,t)2t + D^2_{21} f(t^2+3,t)1\right)2t \\ &\quad + D_1 f(t^2+3,t)2 + \left(D^2_{12} f(t^2+3,t)2t + D^2_{22} f(t^2+3,t)1\right). \end{aligned}$$

Dus $g'(0) = D_2 f(3,0)$ en $g''(0) = 2D_1 f(3,0) + D^2_{22} f(3,0)$. Uit de gegevens halen we dat $g'(0) = 0$ en $g''(0) = 2 - 3 = -1$. Dus g bereikt een lokaal maximum in $t = 0$.

Info: De kettingregel, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2025

Vraag 49

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde. Veronderstel dat $D_1 f(1,1) = 1$, $D_2 f(1,1) = -1$ en $D^2_{11} f(1,1) = D^2_{12} f(1,1) = D^2_{21} f(1,1) = D^2_{22} f(1,1) = 0$.
Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(e^{2t}, (t+1)^2)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal minimum in $t = 0$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Gegeven is dat $g(t) = f(e^{2t}, (t+1)^2)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D_2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1).$$

De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left(D^2_{11} f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D^2_{21} f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1)\right) 2e^{2t} \\ &\quad + D_1 f(e^{2t}, (t+1)^2) 4e^{2t} \\ &\quad + \left(D^2_{12} f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D^2_{22} f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1)\right) 2(t+1) \\ &\quad + D_2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} g'(0) &= D_1 f(1,1) 2 + D_2 f(1,1) 2 \qquad \text{en} \\ g''(0) &= \left(D^2_{11} f(1,1) 2 + D^2_{21} f(1,1) 2\right) 2 \\ &\quad + D_1 f(1,1) 4 + \left(D^2_{12} f(1,1) 2 + D^2_{22} f(1,1) 2\right) 2 + D_2 f(1,1) 2. \end{aligned}$$

Uit de gegevens halen we dat $g'(0) = 0$ en $g''(0) = 2$. Dus g bereikt een lokaal minimum in $t = 0$.

Info: De kettingregel, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2028

Vraag 50

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde. Veronderstel dat $D_1 f(1,1) = 1$, $D_2 f(1,1) = -1$ en $D_{11}^2 f(1,1) = D_{12}^2 f(1,1) = 2$. Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(e^{2t}, (t+1)^2)$.

Correct antwoord

We hebben onvoldoende informatie om na te gaan of g een lokaal maximum of een lokaal minimum in $t = 0$ bereikt.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Gegeven is dat $g(t) = f(e^{2t}, (t+1)^2)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D_2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1).$$

De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left(D_{11}^2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D_{21}^2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1)\right) 2e^{2t} \\ &\quad + D_1 f(e^{2t}, (t+1)^2) 4e^{2t} \\ &\quad + \left(D_{12}^2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2e^{2t} + D_{22}^2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2(t+1)\right) 2(t+1) \\ &\quad + D_2 f(e^{2t}, (t+1)^2) 2. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} g'(0) &= D_1 f(1,1)2 + D_2 f(1,1)2 \qquad \text{en} \\ g''(0) &= \left(D_{11}^2 f(1,1)2 + D_{21}^2 f(1,1)2\right) 2 \\ &\quad + D_1 f(1,1)4 + \left(D_{12}^2 f(1,1)2 + D_{22}^2 f(1,1)2\right) 2 + D_2 f(1,1)2. \end{aligned}$$

Uit de gegevens halen we dat $g'(0) = 0$, maar we beschikken over onvoldoende informatie om de waarde van $g''(0)$ te achterhalen.

Info: De kettingregel, auteur: Kathleen Hoornaert, id: 2029

Vraag 51

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde.
Veronderstel dat $D_1 f(-1,0) = D_2 f(-1,0) = 1$.
Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(\cos(\pi t),(t-1)^2)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal minimum in $t = 1$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Gegeven is dat $g(t) = f(\cos(\pi t),(t-1)^2)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) + D_2 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)2(t-1).$$

De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= \big(D_1 D_1 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) \\ &\qquad + D_2 D_1 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)2(t-1)\big)\,(-\pi \sin(\pi t)) \\ &\quad + D_1 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)(-\pi^2 \cos(\pi t)) \\ &\quad + \big(D_1 D_2 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) \\ &\qquad + D_2 D_2 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)2(t-1)\big)\,2(t-1) \\ &\quad + D_2 f(\cos(\pi t),(t-1)^2)2 \end{aligned}$$

Omdat $\sin \pi = 0, \cos \pi = -1$ vinden we dat $g'(1) = 0$ en $g''(1) = \pi^2 D_1 f(-1,0) + 2D_2 f(-1,0)$.
Uit de gegevens halen we dat $g''(1) = \pi^2 + 2 > 0$. Dus g bereikt een lokaal minimum in $t = 1$.

Vraag 52

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde. Veronderstel dat $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -3$. Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(\cos t, t^2)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal maximum in $t = 0$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Gegeven is dat $g(t) = f(\cos t, t^2)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), t^2)(-\sin(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^2)2t.$$

De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos t, t^2)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cos t, t^2)2t\right)(-\sin t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^2)(-\cos t) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos t, t^2)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos t, t^2)2t\right)2t \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^2)2. \end{aligned}$$

Omdat $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ vinden we dat $g'(0) = 0$ en $g''(0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$. Dus is $g''(0) = -8 < 0$. Bijgevolg bereikt g een lokaal maximum in $t = 0$.

Info: De kettingregel, auteur: Kathleen Hoornaert, bron: Vraag 2034, id: 2799