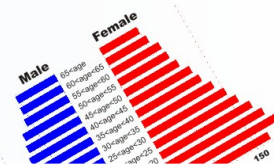


$$(y^\nu - x^\nu)^\nu \leq \frac{\nu}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 1

Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde. Veronderstel dat $D_1 f(3, 0) = 1$, $D_2 f(3, 0) = 0$ en $D_{22}^2 f(3, 0) = -3$. Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(t^2 + 3, t)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal maximum in $t = 0$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

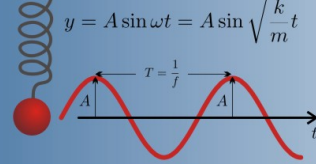
Gegeven is dat $g(t) = f(t^2 + 3, t)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(t^2 + 3, t) 2t + D_2 f(t^2 + 3, t) 1.$$

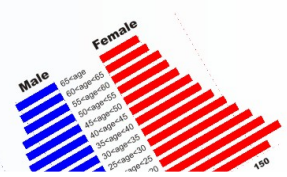
De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= (D_{11}^2 f(t^2 + 3, t) 2t + D_{21}^2 f(t^2 + 3, t) 1) 2t \\ &\quad + D_1 f(t^2 + 3, t) 2 + (D_{12}^2 f(t^2 + 3, t) 2t + D_{22}^2 f(t^2 + 3, t) 1). \end{aligned}$$

Dus $g'(0) = D_2 f(3, 0)$ en $g''(0) = 2D_1 f(3, 0) + D_{22}^2 f(3, 0)$. Uit de gegevens halen we dat $g'(0) = 0$ en $g''(0) = 2 - 3 = -1$. Dus g bereikt een lokaal maximum in $t = 0$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 2

Welk van de volgende functies heeft een inverse functie?

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -4x^3 + 3 \\ g &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Correct antwoord

Zowel f als g .

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Een functie heeft enkel een inverse functie als ze injectief is (in het andere geval heeft de inverse geen eenduidige definitie).

- We kijken of f injectief is

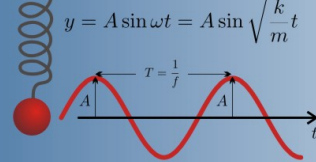
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow -4x_1^3 + 3 = -4x_2^3 + 3 \\ &\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

f is injectief en heeft bijgevolg een inverse.

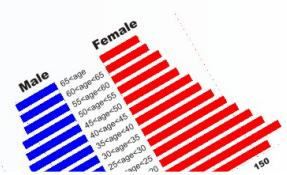
- We kijken of g injectief is.

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1 = \pm x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = +x_2 \quad (g \text{ is namelijk een functie met domein } \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

g is bijgevolg injectief en heeft een inverse.

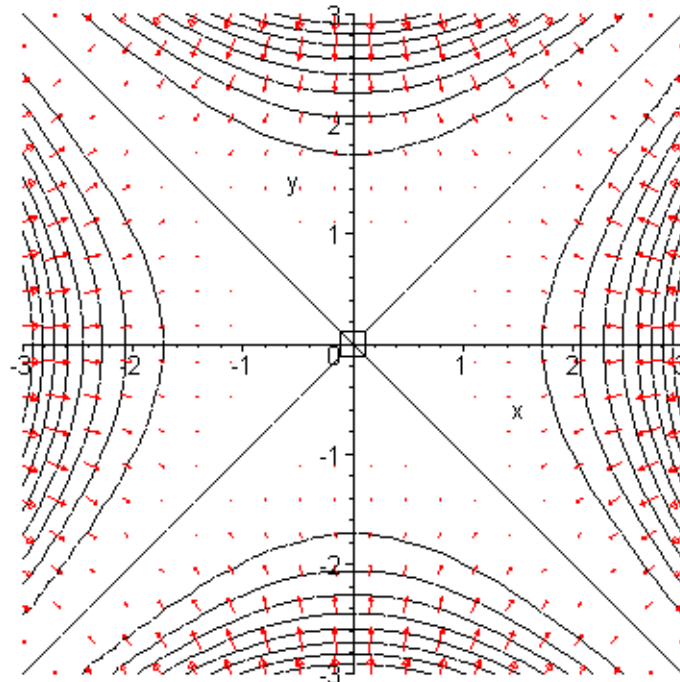


$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



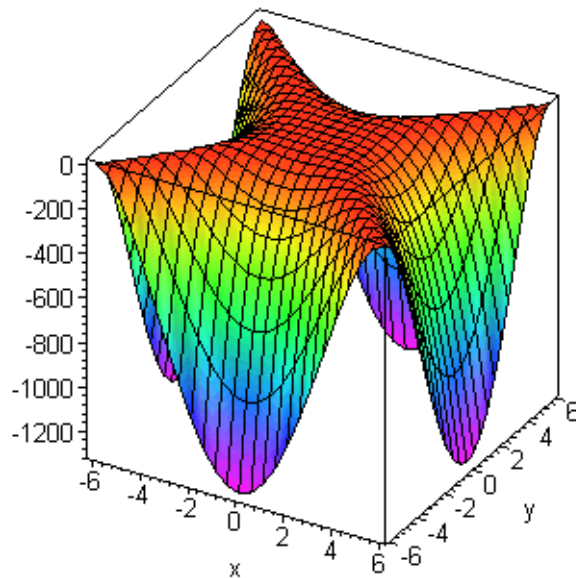
Vraag 3

Gegeven de niveaulijnen en het gradiëntvectorveld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Welke grafiek hoort er bij? In onderstaande grafieken hebben punten op dezelfde hoogte dezelfde kleur.

Correct antwoord

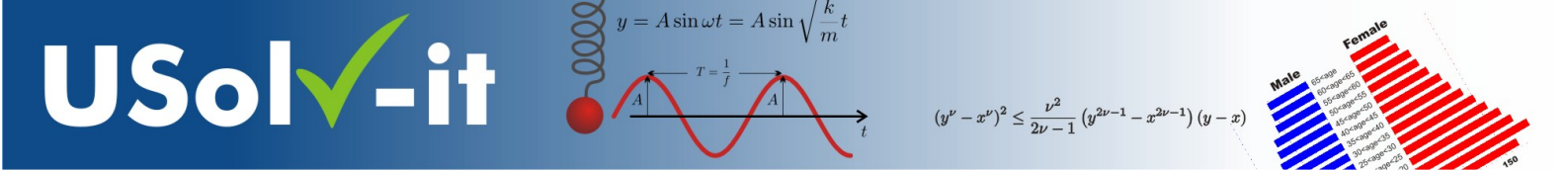


Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Let op: $(0,0)$ is geen zadelpunt. Als je in gelijk welke richting van $(0,0)$ wegloopt, daalt de functiewaarde. Dus de functie bereikt in $(0,0)$ een (lokaal) maximum. Enkel alternatief 4 en 5 blijven over. Bij alternatief 4 zijn de niveaulijnen allemaal cirkels.



Vraag 4

$f(x) = \cos(3x + \frac{5\pi}{3})$ heeft periode :

Correct antwoord

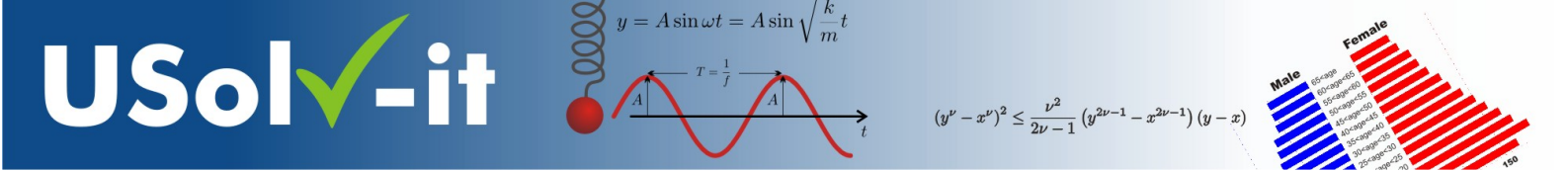
$\frac{2\pi}{3}$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De functie $f(x)$ heeft dezelfde periode als de functie $\cos(3x)$, die periode $\frac{2\pi}{3}$ heeft.



Vraag 5

Als $\vec{v}_1 = \{1, -1\}$ en $\vec{v}_2 = \{\sqrt{2}, 0\}$, dan is $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| =$

Correct antwoord

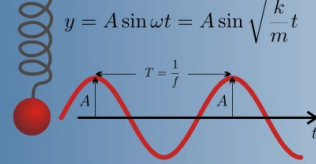
$$\sqrt{4 + 2 \sqrt{2}}$$

Jouw antwoord

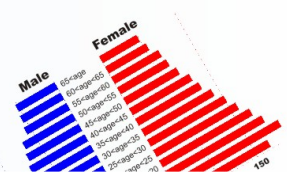
Geen antwoord

Oplossing

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \{1 + \sqrt{2}, -1\} \\ \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| &= \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 2 \sqrt{2}} \end{aligned}$$



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 6

Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; hoeveel van de volgende uitspraken zijn dan waar?

- I. Als $a \leq b$ en $c \leq d$, dan is $a - c \leq b - d$.
- II. Als $a \leq b$ en $c \leq d$, dan is $a + c \leq b + d$.
- III. Als $a \leq b$ en $a \neq 0 \neq b$, dan is $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.
- IV. Als $a \leq b$ en $a \neq 0 \neq b$, dan is $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Correct antwoord

1

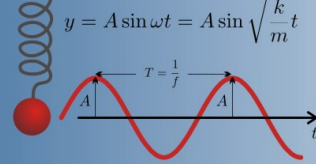
Jouw antwoord

Geen antwoord

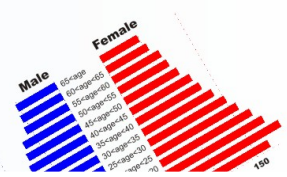
Oplossing

- Uitspraak I. is vals. Neem een tegenvoorbeeld om dit in te zien: $a = 1, b = 2, c = 1$ en $d = 3$. Er geldt dat $1 \leq 2$ en $1 \leq 3$ maar $0 \not\leq -1$.
- Uitspraak II. is correct en wordt eenvoudig geverifieerd door de eigenschappen van orde en som.
- Uitspraak III. is vals. Weer volstaat een tegenvoorbeeld. Neem $a = 1$ en $b = 2$. Er geldt dat $1 \leq 2$ maar niet dat $1 \leq \frac{1}{2}$.
- Uitspraak IV. is vals. Een tegenvoorbeeld laat zien wat er fout kan lopen: stel $a = -1$ en $b = 2$. Er geldt dat $-1 \leq 2$ maar niet dat $\frac{1}{2} \leq -1$.

Slechts 1 van de 4 uitspraken is correct.

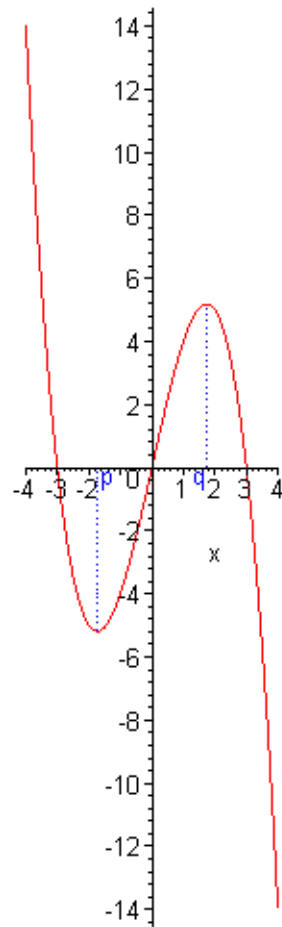


$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 7

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie. Gegeven is de grafiek van de afgeleide van f .



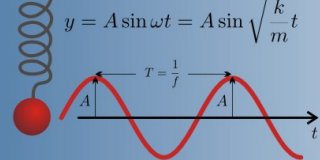
Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Jouw antwoord

Geen antwoord



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$

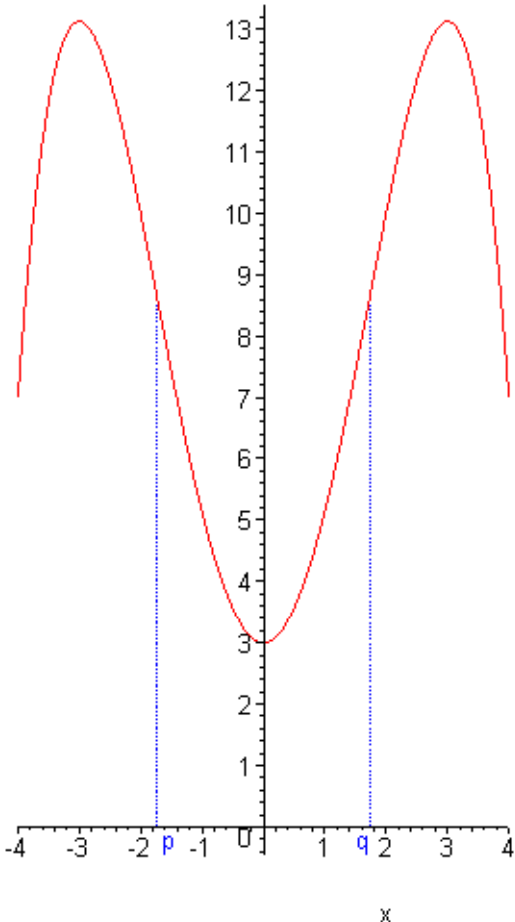


Oplossing

We maken het tekenonderzoek van f' :

x		-3		0		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

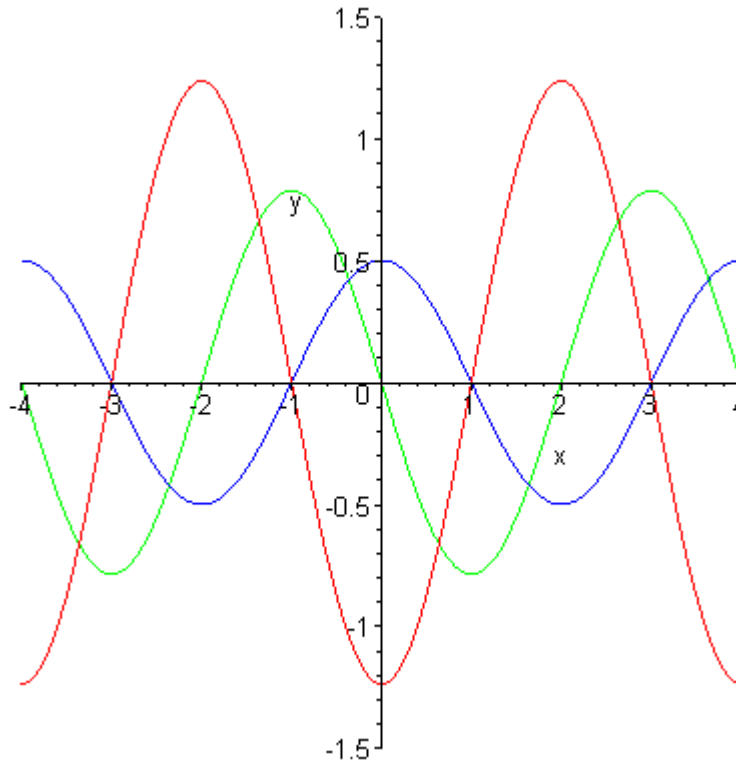
De functie f zou er als volgt kunnen uitzien:



De functie f bereikt een lokaal maximum in 3.

Vraag 8

In onderstaande tekening is de grafiek van een functie f geschetst, tezamen met de grafiek van haar eerste afgeleide f' en haar tweede afgeleide f'' . Welke kromme correspondeert met de grafiek van f , welke met die van f' ?



Correct antwoord

De grafiek van f is blauw, die van haar afgeleide f' is groen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

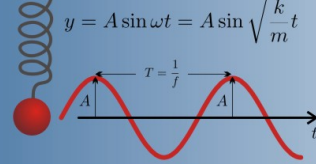
Als de functiewaarde van f' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is f stijgend in dit interval. Als de functiewaarde van f' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is f dalend in dit interval.

Als de functiewaarde van f'' groter of gelijk is aan 0 in alle punten van een open interval, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar boven gericht ($\smile$) voor dit interval. Als de functiewaarde van f'' daar kleiner of gelijk is aan 0, dan is de holle zijde van de grafiek van f naar onder gericht ($\frown$) voor dit interval.

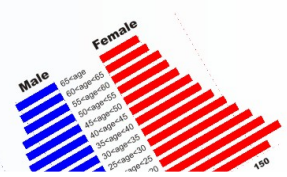
De functie met de rode grafiek is stijgend tot -2 . De afgeleide moet dan positief zijn tot -2 . Er is geen enkele van de andere functies die hieraan voldoet. Dus de grafieken van f en van f' kunnen niet rood zijn. (Waarom kan ook de grafiek van f' niet rood zijn?)

De functie met de groene grafiek is dalend tot -3 . De afgeleide moet dan negatief zijn tot -3 . Hieraan voldoet enkel de functie met de rode grafiek. De holle zijde van de functie met de groene grafiek is naar boven gericht op het interval $]-2, -1[$. Dan zou de tweede afgeleide positief moeten zijn op dit interval. De functie met de blauwe grafiek (de enige overblijvende) voldoet hier niet aan.

De grafiek van f zou dus blauw moeten zijn, de grafiek van f' groen en de grafiek van f'' rood. Maak zelf het tekenonderzoek van deze functies om te controleren dat alles nu klopt (grafiek boven de X -as $\Rightarrow +$ teken, grafiek onder de X -as $\Rightarrow -$ teken, snijpunt met de X -as $\Rightarrow$ nulpunt).



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 9

Stel S een homogeen stelsel van m vergelijkingen ($m \neq 0$) met n onbekenden én $m < n$. Dan

Correct antwoord

heeft S zeker één oplossing verschillend van de nuloplossing.

Jouw antwoord

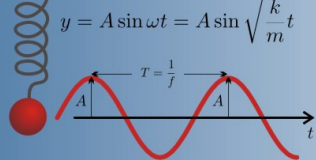
Geen antwoord

Oplossing

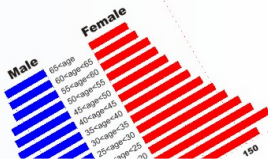
Merk eerst en vooral op dat alternatief (a) zeker niet juist kan zijn aangezien een homogeen stelsel **altijd** minstens de nuloplossing heeft. Bovendien leert de dimensiestelling ons dat

$$n \text{ (=aantal onbekenden)} = \text{rang}(A) + \dim \text{Ker}(A),$$

waarbij A de $(m \times n)$ -coëfficiëntenmatrix van het stelsel is. Indien S enkel de nuloplossing als oplossing zou hebben, dan moet $\dim \text{Ker}(A) = 0$. Daaruit zou dan volgen dat $\text{rang}(A) = n$. Omdat $m < n$, kan $\text{rang}(A)$ echter maximaal gelijk zijn aan m . Bijgevolg moet $\dim \text{Ker}(A) > 0$, of nog, er is minstens 1 vrijheidsgraad in de oplossing van het homogeen stelsel. We kunnen dus besluiten dat S zeker één oplossing heeft verschillend van de nuloplossing.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu - 1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 10

Welke uitspraak is waar over de verzameling $A = [1, \pi] \cap \mathbb{Q}$ als deelverzameling van $\mathbb{R}$?

Correct antwoord

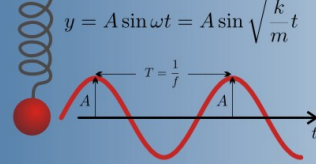
A heeft geen maximum, maar wel een minimum en een supremum.

Jouw antwoord

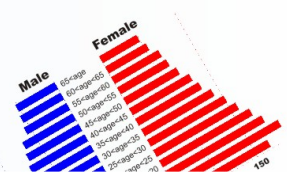
Geen antwoord

Oplossing

De verzameling A heeft geen maximum in $\mathbb{R}$ (π behoort niet tot A en kan dus geen maximum zijn); het minimum van A is gelijk aan 1 en het supremum van A is π (supremum = minimum van de bovengrenzen).



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 11

Zij $A \subset \mathbb{R}$. Welke bewering is juist ?

Correct antwoord

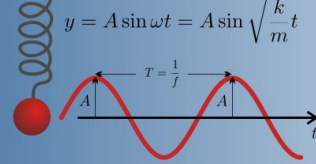
Als A geen infimum heeft, dan heeft A geen minimum.

Jouw antwoord

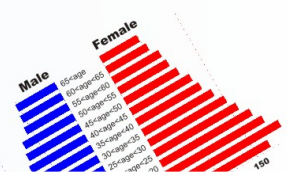
Geen antwoord

Oplossing

Als A geen infimum heeft, is A niet naar onder begrensd. Dus heeft A ook geen minimum. (Toon aan dat de andere antwoordalternatieven fout zijn, door telkens een gepast tegenvoorbeeld te construeren.)



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 12

De vergelijking

$$y e^x + y^3 - 2 = 0$$

definieert op impliciete wijze een functie $y = f(x)$. Bereken $f(0)$ en $f'(0)$.

Correct antwoord

$$f(0) = 1 \text{ en } f'(0) = -\frac{1}{4}$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

$$y e^x + y^3 - 2 = 0 \quad (*)$$

defineert op impliciete wijze een functie $y = f(x)$.

Om $f(0)$ te berekenen vullen we $x = 0$ in in (*). Dit geeft :

$$y + y^3 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0$$

De tweedegraadsveelterm heeft geen reële nulpunten. Dus : $f(0) = 1$.

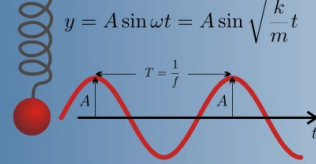
Om $f'(0)$ te berekenen leiden we (*) impliciet af naar x :

$$y' e^x + y e^x + 3 y^2 y' = 0$$

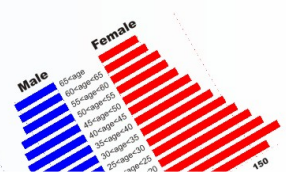
Dan vullen we $x = 0$ en $y = 1$ in. Dit geeft :

$$y' + 1 + 3 y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 y' = -1$$

Dus : $f'(1) = -\frac{1}{4}$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 13

S is een niet homogeen stelsel van 17 lineaire vergelijkingen in 13 onbekenden, zodat de rang van de coëfficiëntenmatrix en de rang van de vermeerderde matrix beide gelijk zijn aan 12. Dan

Correct antwoord

heeft S oneindig veel oplossingen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Als een stelsel oplosbaar is dan zijn er “evenveel” oplossingen voor het niet homogene (m.a.w. volledige) stelsel als voor het geassocieerde homogene stelsel. Daar de rang van de matrix 12 is, zijn er oneindig veel oplossingen.

Vraag 14

Veronderstel dat de vergelijking

$$e^{xy} + 3e^{y+x^2-1} = 2$$

de functie $y = f(x)$ bepaalt. Van deze (impliciet gedefinieerde) functie f willen we de functiewaarde en de afgeleide in het punt $x = 1$ bepalen. Welk resultaat vind je hiervoor?

Correct antwoord

$$f(1) = -\ln 2 \text{ en } f'(1) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{3}{2}$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

$$e^{xy} + 3e^{y+x^2-1} = 2 \quad (*)$$

defineert op impliciete wijze een functie $y = f(x)$.

Om $f(1)$ te berekenen vullen we $x = 1$ in in (*). Dit geeft :

$$\begin{aligned} e^y + 3e^{y+1-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow 4e^y &= 2 \\ \Leftrightarrow e^y &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Dus : $f(1) = -\ln 2$.

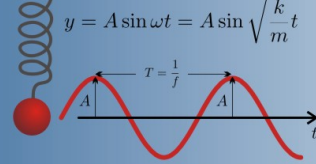
Om $f'(1)$ te berekenen leiden we (*) impliciet af naar x :

$$e^{xy}(y + xy') + 3e^{y+x^2-1}(y' + 2x) = 0$$

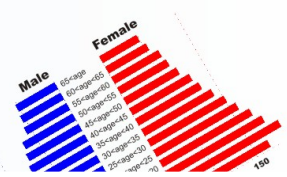
Dan vullen we $x = 1$ en $y = -\ln 2$ in. Dit geeft :

$$\begin{aligned} e^{-\ln 2}(-\ln 2 + y') + 3e^{-\ln 2}(y' + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\ln 2 + y' + 3(y' + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4y' &= \ln 2 - 6 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dus : $f'(1) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{3}{2}$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 15

Ga na of de volgende limiet bestaat en bereken desgevallend:

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x + 1)^3}.$$

Correct antwoord

$+\infty$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De limiet

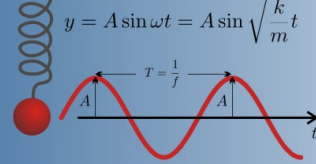
$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x + 1)^3}$$

leidt tot het onbepaalde geval $\frac{0}{0}$. Het punt -1 is derhalve nulpunt van de veeltermen die in teller en noemer van deze breuk staan. We proberen dus maximaal te vereenvoudigen. Aangezien $x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$ is

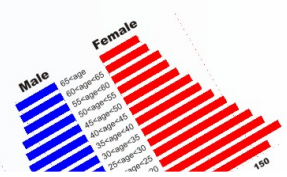
$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x + 1)^3} = \lim_{-1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)^2} \rightarrow \frac{2}{0}.$$

Een tekenonderzoek van teller en noemer dringt zich op. Nu is $(x + 1)^2$ altijd positief. Bijgevolg is

$$\lim_{-1} \frac{x^3 - x}{(x + 1)^3} = +\infty$$



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 16

De richtingsafgeleide van $f(x,y) = x + y$ in de richting bepaald door de positieve x -as in het punt $(0,-1)$ is:

Correct antwoord

1

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De hoek θ , die de richting bepaalt van de positieve x -as, is gelijk aan 0.

Bijgevolg is de richtingsafgeleide gelijk aan:

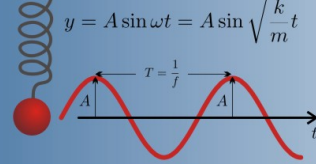
$$f'_{\theta=0}(0,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) \cdot \cos(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) \cdot \sin(0) \tag{1}$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1. \tag{2}$$

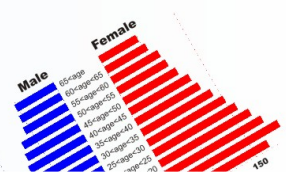
Opmerking:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = 1(0,-1) = 1 \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = 1(0,-1) = 1;$$

de notatie $1(0,-1)$ betekent hier dat men de waarde van de constante functie 1 berekent in het punt $(0,-1)$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 17

Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en dat $a - b > 0$. Verder is gegeven dat $a^3 - 3a^2b - b^3 = 0$. Dan is $\log(a - b)$ gelijk aan

Correct antwoord

$$\frac{1}{3} (\log 3 + \log a + 2 \log b)$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

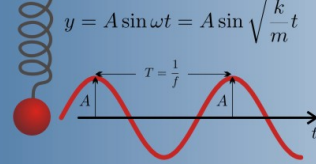
Oplossing

Uit het gegeven volgt dat

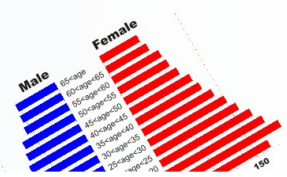
$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= 3ab^2 \end{aligned}$$

Bijgevolg geldt

$$\begin{aligned} \log(a - b) &= \frac{1}{3} \log(a - b)^3 \\ &= \frac{1}{3} \log 3ab^2 \\ &= \frac{1}{3} (\log 3 + \log a + 2 \log b). \end{aligned}$$



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 18

Gegeven $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ en $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (e^t, 2e^{-t}, e^t + e^{-t})$.
 Bereken $(g \circ f)(0)$ en bereken vervolgens $(g \circ f)'(0)$ met de kettingregel.

Correct antwoord

$$(g \circ f)(0) = 8 \text{ en } (g \circ f)'(0) = -2$$

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

We berekenen dat $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1, 2, 2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.
 Om $(g \circ f)'(0)$ te berekenen gebruiken we de kettingregel voor het afleiden van een samengestelde functie van meerdere veranderlijken.

$$(g \circ f)'(0) = D_1g(f(0)) \cdot f'_1(0) + D_2g(f(0)) \cdot f'_2(0) + D_3g(f(0)) \cdot f'_3(0),$$

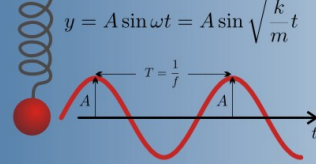
met f_1, f_2 en f_3 de componentfuncties van f .
 Nu is $D_1g(x, y, z) = y + z$, $D_2g(x, y, z) = x + z$, $D_3g(x, y, z) = y + x$, $f'_1(t) = e^t$, $f'_2(t) = -2e^{-t}$, $f'_3(t) = e^t - e^{-t}$ en $f(0) = (1, 2, 2)$. Dus vinden we dat

$$(g \circ f)'(0) = (2 + 2) \cdot 1 + (1 + 2) \cdot (-2) + (2 + 1) \cdot (1 - 1) = -2.$$

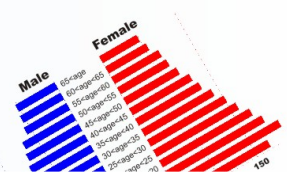
Ter controle kunnen we ook $(g \circ f)(t)$ berekenen :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= g(e^t, 2e^{-t}, e^t + e^{-t}) \\ &= e^t \cdot 2e^{-t} + 2e^{-t} \cdot (e^t + e^{-t}) + (e^t + e^{-t}) \cdot e^t = 2 + 2 + 2e^{-2t} + e^{2t} + 1 \\ &= 5 + 2e^{-2t} + e^{2t}. \end{aligned}$$

Dan volgt dat $(g \circ f)(0) = 8$ en $(g \circ f)'(t) = -4e^{-2t} + 2e^{2t}$ en dus ook $(g \circ f)'(0) = -2$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 19

Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een functie met continue partiële afgeleiden tot en met de tweede orde.
 Veronderstel dat $D_1 f(-1, 0) = D_2 f(-1, 0) = 1$.
 Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(\cos(\pi t), (t-1)^2)$.

Correct antwoord

g bereikt een lokaal minimum in $t = 1$.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

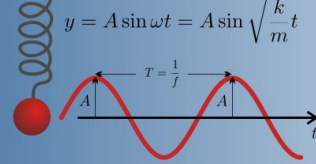
Gegeven is dat $g(t) = f(\cos(\pi t), (t-1)^2)$. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$g'(t) = D_1 f(\cos(\pi t), (t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) + D_2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2) 2(t-1).$$

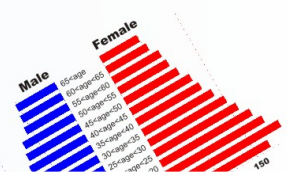
De formule voor de afgeleide van een product en de kettingregel leren ons dat

$$\begin{aligned} g''(t) &= (D_{11}^2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) \\ &\quad + D_{21}^2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2) 2(t-1)) (-\pi \sin(\pi t)) \\ &\quad + D_1 f(\cos(\pi t), (t-1)^2)(-\pi^2 \cos(\pi t)) \\ &\quad + (D_{12}^2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2)(-\pi \sin(\pi t)) \\ &\quad + D_{22}^2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2) 2(t-1)) 2(t-1) \\ &\quad + D_2 f(\cos(\pi t), (t-1)^2) 2 \end{aligned}$$

Omdat $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$ vinden we dat $g'(1) = 0$ en $g''(1) = \pi^2 D_1 f(-1, 0) + 2 D_2 f(-1, 0)$.
 Uit de gegevens halen we dat $g''(1) = \pi^2 + 2 > 0$. Dus g bereikt een lokaal minimum in $t = 1$.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 20

De markt van een bepaald product wordt beschreven door de volgende vraag- en aanbodfuncties (resp. D en S), die de marktprijs weergeven in functie van de productiehoeveelheid q :

$$\begin{cases} D(q) = 50 - 2q \\ S(q) = 14 + 4q \end{cases}$$

Bereken de evenwichtsprijs. Wat is bij deze evenwichtsprijs het consumentensurplus?

Correct antwoord

36

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

De markt is in evenwicht bij een productiehoeveelheid q_e , oplossing van

$$D(q) = S(q).$$

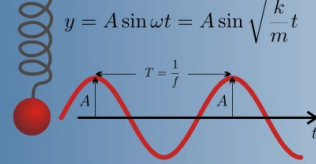
Dit betekent

$$50 - 2q = 14 + 4q \Leftrightarrow 36 = 6q \Leftrightarrow q = 6.$$

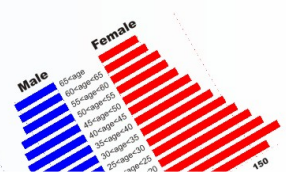
Voor $q = q_e = 6$ is de bijhorende evenwichts-eenheidsprijs $p_e = D(q_e) = S(q_e) = 38$.

Het consumentensurplus bij die evenwichtsprijs p_e is

$$\begin{aligned} \text{CS} &= \int_0^{q_e} D(q) dq - p_e q_e \\ &= \int_0^6 (50 - 2q) dq - 6 \cdot 38 \\ &= [50q - q^2]_0^6 - 228 \\ &= 36. \end{aligned}$$



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 21

Wat kan je over de volgende functie zeggen?
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -e^{-x}$.

Correct antwoord

f is orde-bewarend.

Jouw antwoord

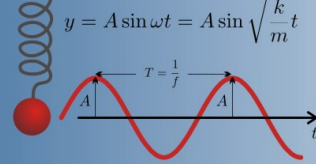
Geen antwoord

Oplossing

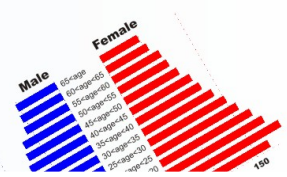
Een functie is orde-bewarend $\Leftrightarrow \forall x, y : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
 Een functie is orde-omkerend $\Leftrightarrow \forall x, y : x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.
 Veronderstel dat $x, y \in \mathbb{R}$ en dat $x \leq y$. Dan geldt het volgende

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ -x &\geq -y \\ e^{-x} &\geq e^{-y} \quad (\text{de exponentiële functie is orde-bewarend}) \\ -e^{-x} &\leq -e^{-y}. \end{aligned}$$

We zien dat $x \leq y \Rightarrow -e^{-x} \leq -e^{-y}$, de functie $f(x) = -e^{-x}$ is bijgevolg orde-bewarend.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 22

S is een homogeen stelsel met 35 vergelijkingen in 34 onbekenden. Dan

Correct antwoord

zijn er te weinig gegevens bekend om het aantal oplossingen van S te voorspellen.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Er zijn te weinig gegevens om te kunnen besluiten hoeveel oplossingen S precies heeft! Aangezien S een homogeen stelsel is, heeft S minstens 1 oplossing (de nuloplossing). Daarenboven is de oplossingsverzameling, $\text{Opl}(S)$, een vectorruimte en geldt er dat

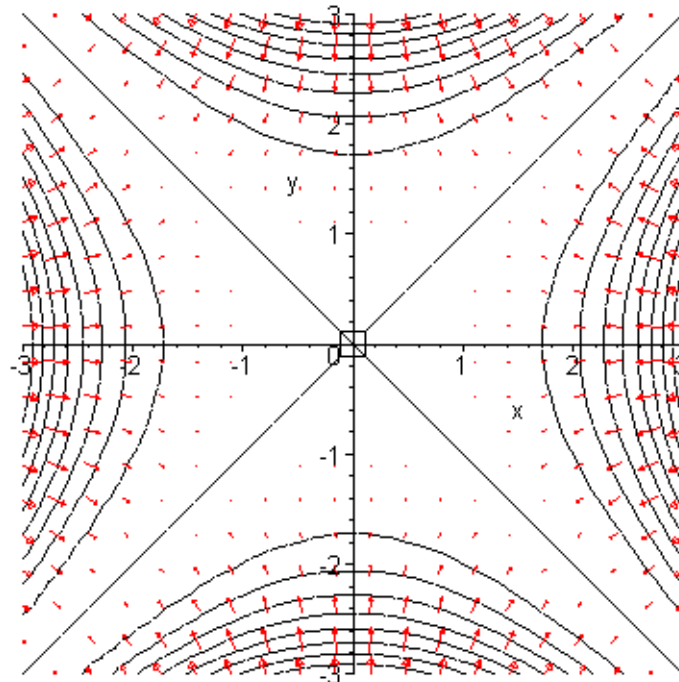
$$\dim \text{Opl}(S) = 34 - \text{rang}(S).$$

Er staat echter in de gegevens niet hoe groot de rang van S is. En aangezien er meer dan 34 vergelijkingen zijn kunnen er zich twee mogelijkheden voordoen:

1. $\text{rang}(S) = 34$. In dit geval heeft het stelsel enkel de nuloplossing.
2. $\text{rang}(S) < 34$. In dit geval heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Vraag 23

Gegeven de niveaulijnen en het gradiëntvectorveld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Welke uitspraak is waar?

Correct antwoord

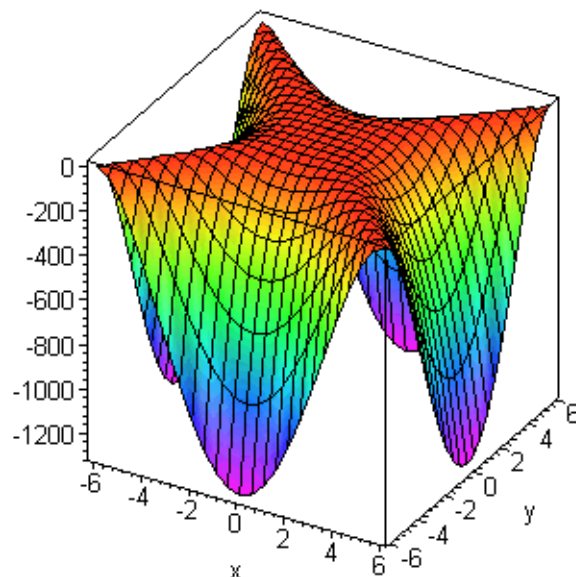
De functie bereikt in de oorsprong een globaal maximum.

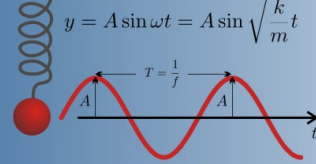
Jouw antwoord

Geen antwoord

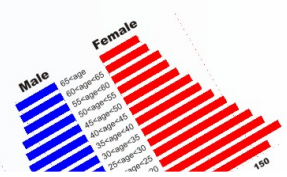
Oplossing

Let op: $(0,0)$ is geen zadelpunt. Als je in gelijk welke richting van $(0,0)$ wegloopt, daalt de functiewaarde of blijft ze hetzelfde. Merk op dat f in de punten op de rechte met vergelijking $y = x$ en in de punten op de rechte met vergelijking $y = -x$ dezelfde functiewaarde aanneemt als in $(0,0)$. Dus de functie f bereikt in de oorsprong $(0,0)$ een lokaal maximum, maar ook een globaal maximum. Hieronder vind je de grafiek van f .





$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 24

Een productiefunctie Q is gegeven in functie van de arbeid (L) en het geïnvesteerde kapitaal (K) als $Q = 10K^{0.8}L^{0.2}$. Hoeveel van de volgende uitspraken zijn correct ?

- $\langle \nabla Q(K, L), (K, L) \rangle = Q(K, L)$
- De richtingsafgeleide van $Q(K, L)$ in de richting $(1, 0)$ is $8K^{-0.2}L^{0.2}$.
- $D_{K,L}^2 Q(K, L) = 1.6K^{-0.2}L^{-0.8}$
- Bij toenemende waarde van K stijgt de marginale productiviteit van de arbeid.

Correct antwoord

4

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Observeer vooreerst dat de gegeven productiefunctie Q homogeen is van graad 1. Voor de eerste uitspraak beschouwen we

$$\langle \nabla Q(K, L), (K, L) \rangle = K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Door gebruik te maken van de stelling van Euler over homogene functies, kunnen we dus besluiten dat de eerste uitspraak correct is.

De richtingsafgeleide van $Q(K, L)$ in de richting van $(1, 0)$ is precies de partiële afgeleide van Q naar de eerste variabele (variabele K). We vinden dus

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 8K^{-0.2}L^{0.2}$$

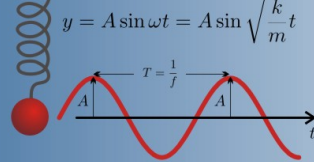
zodat we zien dat ook de tweede uitspraak correct is.

Leiden we deze partiële afgeleide nogmaals af naar L , dan zien we dat ook uitspraak 3 correct is.

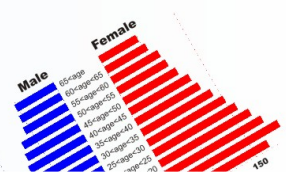
De marginale productiviteit van de arbeid is gedefinieerd als $D_L Q(K, L)$. Nu is

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = 2K^{0.8}L^{-0.8},$$

en dit is een *stijgende* functie in K . Ook uitspraak 4 is dus correct.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 25

Beschouw de volgende functie:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

Dan is $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ gelijk aan

Correct antwoord

$$-2\frac{x}{y^2} - 2\frac{y}{x^2}$$

Jouw antwoord

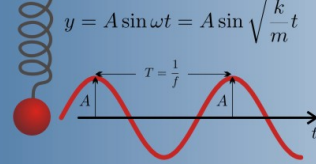
Geen antwoord

Oplossing

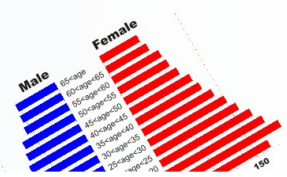
Het antwoord volgt na de berekening

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y}{x} \right) \\ &= -2\frac{x}{y^2} - 2\frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

Dit is de vierde keuzemogelijkheid.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 26

Is de volgende uitspraak juist of fout?

Zij $x, y \in \mathbb{R}^n$. Als het scalair product van x en y gelijk is aan nul, dan is x of y gelijk aan de nulvector.

Deze uitspraak is

Correct antwoord

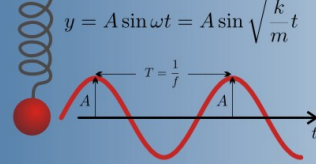
fout.

Jouw antwoord

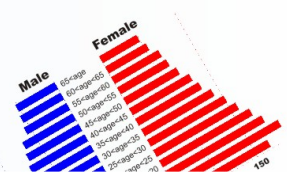
Geen antwoord

Oplossing

Fout. Neem x en y twee loodrechte vectoren, bijvoorbeeld $x = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ en $y = e_2 = (0, 1, \dots, 0)$. Dan is het scalair product van x en y gelijk aan nul, maar noch x , noch y is gelijk aan de nulvector.

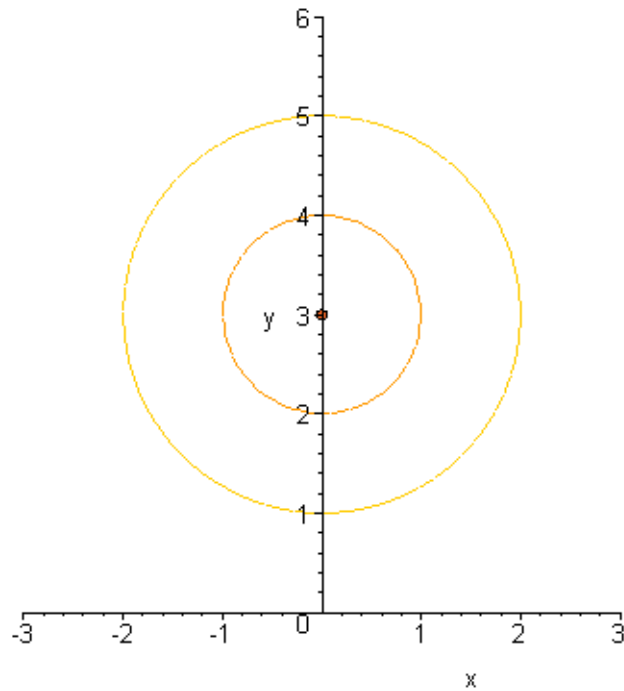


$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 27

Gegeven de niveaulijnen van een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (niveau 0 is oranje, niveau 1 is lichtoranje, niveau 2 is geel).



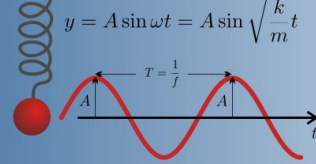
Wat is het voorschrift van f ?

Correct antwoord

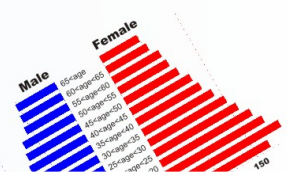
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$$

Jouw antwoord

Geen antwoord



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Oplossing

De niveaulijn die behoort bij niveau c (met $c \in \mathbb{R}$) is gelijk aan de verzameling

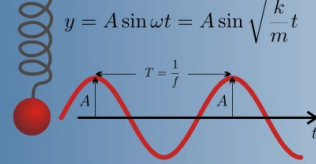
$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

De niveaulijnen zijn cirkels met middelpunt $(0, 3)$. Merk op dat de afstand tussen 2 opeenvolgende niveaulijnen steeds 1 is.

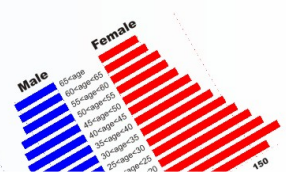
Herinner je dat de vergelijking van een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r gegeven wordt door $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voor alle voorschriften geldt dat de niveaulijn bij niveau c met $c < 0$ gelijk is aan de lege verzameling, want steeds is $f(x, y) \geq 0$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. We overlopen de voorschriften:

1. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.
2. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{c}$: $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is juist, maar de straal niet. Zo is bijvoorbeeld de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal $\sqrt{2}$.
3. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is een ellips (en geen cirkel): $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{c})^2} = 1\}$.
4. De niveaulijn $N_0 = \{(0, -3)\}$. Dit punt is verkeerd.
De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal c : $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - (-3))^2 = c^2\}$. Het middelpunt van de cirkel is verkeerd.
5. De niveaulijn $N_0 = \{(0, 3)\}$. Dit punt is juist.
De niveaulijn N_c die behoort bij niveau c (met $c > 0$) is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal c : $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = c^2\}$. De niveaulijn N_1 die behoort bij niveau 1 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 1, de niveaulijn N_2 die behoort bij niveau 2 is de cirkel met middelpunt $(0, 3)$ en straal 2.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 28

f en g zijn twee overal gedefinieerde functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Welke uitspraak is FOUT?

Correct antwoord

Als f en g dalend zijn, dan is $g \circ f$ dalend.

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Uitspraak 4 is fout.

f is een dalende functie, d.w.z.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

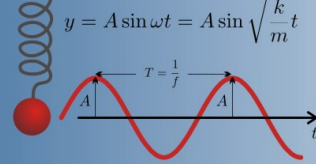
Aangezien g een functie is die overal gedefinieerd is in $\mathbb{R}$, kunnen we de definitie van een dalende g ook toepassen op $f(x)$ en $f(y)$, zodat

$$\forall f(x), f(y) \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y)).$$

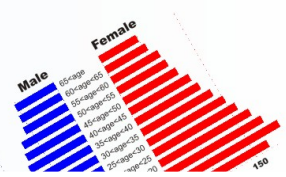
Brengen we de twee definities van de dalende functies f en g samen, dan vinden we dat

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y)).$$

Daaruit mogen we besluiten dat $g \circ f$ een stijgende functie is, zodat antwoordalternatief 4 foutief is.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu-1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y-x)$$



Vraag 29

Een (overal bepaalde) functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is even $\iff \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)$. Welke uitspraak is waar ?

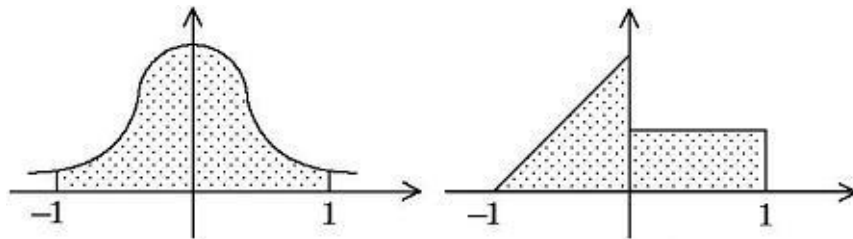
Correct antwoord

$$f \text{ is even} \implies \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx$$

Jouw antwoord

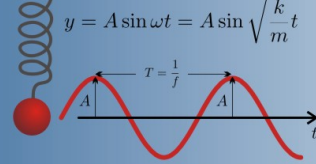
Geen antwoord

Oplossing

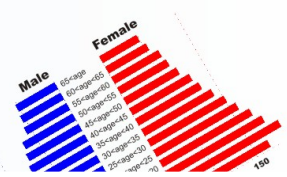


De linkse grafiek toont een even functie. We zien dat $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx$. De pijl geldt van links naar rechts.

De rechtse grafiek toont een functie waarvoor $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx$. Toch is $f(x)$ geen even functie. De pijl geldt niet van rechts naar links.



$$(y^\nu - x^\nu)^2 \leq \frac{\nu^2}{2\nu - 1} (y^{2\nu-1} - x^{2\nu-1}) (y - x)$$



Vraag 30

De niet-triviale driehoek abc met $b(2, 0)$, $c(1, 3)$ en $a(3, k)$, heeft een rechte hoek in het hoekpunt a . Dan is $k = ?$

Correct antwoord

2 of 1

Jouw antwoord

Geen antwoord

Oplossing

Door de rechte hoek in het hoekpunt a , staan de vectoren $\vec{ab}$ en $\vec{ac}$ loodrecht op elkaar, vandaar dat

$$\begin{aligned} \vec{ab} \cdot \vec{ac} &= 0 \Leftrightarrow \{-1, -k\} \cdot \{-2, 3 - k\} = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \text{ of } k = 1 \end{aligned}$$