Oefeningen Module 1 p 1.12

1 morge mooi weer $\Rightarrow$ we gaan wandelen
ontkenning: Als het morge mooi weer is, gaan we nt wandelen

2 ø, b, ø, e, j

3 $\forall k \in K, \exists M \in m$: k heeft een m.
volgorde belangrijk: $\forall m \in M, \exists k \in K$: k heeft een m
= Alle moeders hebben een kind
$\exists m \in M, \forall k \in K$: k heeft een m
= er bestaat een vrouw die moeder is van alle kinderen

4 a $\forall p \in P : \exists d \in D$: d past op p
b $\exists d \in D$: $\forall p \in P$: d past op p
c ~~$\exists s \in S$ s~~ slaagt
$\forall s \in S$: (s studeert goed) $\Rightarrow$ (s zal slagen)

5 a ~~$\forall p \in P : \exists d \in D$: d past niet op p~~
$\exists p \in P : \forall d \in D$: d past niet op p
Er bestaat een potje waar geen enkel dekseltje op past.
b $\forall d \in D : \exists p \in P$: d past niet op
Voor iedere deksel is er een potje waarop de deksel niet past
c $\forall s \in S$: (s studeert goed) $\Rightarrow$ (s zal niet slagen)
$\exists s \in S$: en
Er is iemand die goed studeert en nt zal slagen.

6 a ~~Voor alle x'en een reëel getal en alle y'en een reëel getal kunnen we zeggen dat $x^2 = y^2$ gelijk is aan $x = y$.~~
Als het kwadraat van twee reële getallen gelijk is, zijn de twee reële getallen ook gelijk.
b $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x^2 = y^2) \neq (x \neq y)$
en
Er bestaan reële getallen waarvoor het kwadraat gelijk is die verschillend zijn.

te ontkennen $(-2)^2 = 2^2$ maar $-2 \neq 2$

Oefeningen Module 2

* Pagina 2.10

1 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

$= (a^2-ab+ab-b^2)(a^2+b^2)$

$= (a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$= (a^4+a^2b^2-a^2b^2-b^4)$

$= a^4-b^4$

2 $\sqrt{a^2} = |a| \quad -a$

3 $\sqrt[4]{\dfrac{a^{-7}(a^2b^3c^4)^2}{(abc^{10})^3(b^3c^{19})^{-2}}} = \sqrt[4]{\dfrac{(a^2b^3c^4)^2(b^3c^{19})^2}{(abc^{10})^3\, a^7}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{a^4b^6c^8b^6c^{38}}{a^3b^3c^{30}a^7}}$

$= \sqrt[4]{a^{4-3-7}b^{6+6-3}c^{8+38-30}}$

$= \sqrt[4]{a^{-6}b^9c^{16}}$

$= a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{9}{4}}c^4$

$= \dfrac{b^2\sqrt[4]{b}\,c^4}{a\sqrt{a}}$

4 $\dfrac{x+1}{x} = x+1$

$\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \cdot x + \left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot x$

$= x + \dfrac{x}{x}$

$= x+1$ *

* Juist antwoord:

$\dfrac{x+1}{x} = x+1 \iff \dfrac{(x+1)x}{x} = (x+1)x$

$\iff x+1 = x^2+x$

$\iff 1-x^2=0 \iff x \in \{-1,1\}$

5 $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{x+1}{x-1}$

$\iff \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} < \dfrac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$\iff \dfrac{x^2-x-x+1}{x^2-x+x-1} < \dfrac{x^2+x+x+1}{x^2+x-x-1}$

$\iff \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} < \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ de zelfde noemer dus je mag aftrekken

$\iff \dfrac{-4x}{(x^2-1)} < 0$

		-1		0		1	
$-4x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

opl $V =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

* Pagina 2.20

2 $A \subseteq \mathbb{R}$

A begrensd a.s.a $R \in \mathbb{R}^+$ zodat $|x| \leq R$ voor alle
→ A heeft een ondergrens m en een bovengrens M.
Nu moet er een reëel getal R zijn dat sowieso groter is als $x \in A$.

3 a $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ en } c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$

↳ d is sowieso groter als c dus zal b + d ook sowieso groter blijven als c + d

b neen dit mag niet :

vb. $a = 5$ en $b = 7$

$c = 3$ en $d = 6$

$\Rightarrow a \leq b$ en $c \leq d$

$\Rightarrow a + c \leq b + d$

$5 + 3 \leq 7 + 6$

MAAR $a - c \leq b - d$?

$5 - 3 \leq 7 - 6$ NIET juist !

4 a $a \leq b$ en $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

$a = -2$ en $b = 4$ $\quad ac\,(6) > bd\,(-4)$

$c = -3$ en $d = -1$

b $a = 2$ $\quad b = 4$ $\quad ac\,(6) > bd\,(-20)$

$c = 3$ $\quad d = 5$

d $a^2\ (5^2) \leq b^2\ ((-7)^2)$

MAAR $5 \geq -7$

e $\sqrt{a}\ (\sqrt{49}) \leq \sqrt{b}\ (\sqrt{-64})$

MAAR $49 \geq -64$

$\Rightarrow$ juiste eigenschappen op antwoordblad.

5 (ii) $|x+2| \geq 5$ 5a) $|x-a| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x+2| \leq 5$

$\Leftrightarrow -5 \leq x+2 \leq 5$ $-\varepsilon \leq x-a < +\varepsilon$

$\Leftrightarrow -5-2 \leq x \leq 5-2$

$\Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$

Dus opl $V = \,]-\infty, -7] \cup [3, +\infty[$

6 a) deze opl. : $a \geq 0$ en $a \leq 0$

$\hookrightarrow$ vb $a = 3$

TB: $-a \leq a \leq a$ $\quad -|a| \leq a \leq |a|$ $\quad a + a \leq 0$, $2a \leq 0$

- Als $a \geq 0$: $a = |a|$ TB: $a \leq a \leq -a$ $\quad -|3| \leq 3 \leq |3|$ $\quad a \leq 0$

en dus $-a < a$ $\quad 3 \leq 3 \leq 3$ OK

- Als $a < 0$: $+|a| = -a$ $\quad \hookrightarrow -|a| \leq a \leq |a|$

en dus $a < |a|$ $\quad -|-3| \leq -3 \leq |-3|$

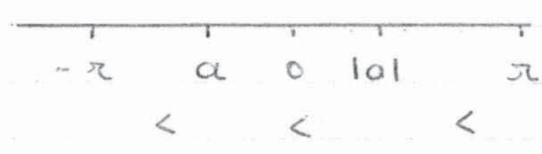
- Als $a = 0$: $-|a| = a = |a|$ $\quad -3 \leq -3 \leq 3$ OK

b) $a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}^+$: $-r \leq a \leq r$, dan is $|a| \leq r$

$r \geq a$ dus sowieso $r \geq |a|$

m.a.w. $-r \leq a \leq r \Rightarrow |a| \leq |r|$ $r \in \mathbb{R}^+_0 \Rightarrow$ dus // mogelijk / opgel

$|a| \leq r$ ~~st~~



c)

Stel $a = \max\{a, b\}$, dan is $a \geq b$

$\Downarrow$

$a - b \geq 0$

$\Downarrow$

$|a-b| = a-b$

$a \overset{?}{=} \frac{1}{2}(a + \cancel{b} + a - \cancel{b})$

7 (1) Voor alle $a,b \in \mathbb{R}$ is $|a+b| \leq |a| + |b|$

We weten $-|a| \leq a \leq |a|$ en $-|b| \leq b \leq |b|$

Dus: ....

(2) Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ is $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

$-|b| \leq b \leq |b|$ +

$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$ ↙ zie 6.b.

Dus $|a+b| \leq |a|+|b|$

Dus $|a+b| \leq |a|+|b|$ (kan ook met optellen x!)

(2) uit (1): $|x-y| = |x-z+z-y| = |\underbrace{(x-z)}_{a} + \underbrace{(z-y)}_{b}| \leq |x-z| + |z-y|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Dus $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

$-z$ en $+z$ invoeren bedrijf [illegible]

8 a $|ab| = |a| \cdot |b|$

↳ waar

b $|a-b| \leq |a| + |b|$

↳ waar

c $|a-b| \leq |a| - |b|$

↳ niet waar

vb $a = -5$ en $b = -8$

$|a-b|$ $(|-5+8| = 3) \geq |a| - |b|$ $(5-8 = -3)$

9 $|x+5| \leq 2$ en $|y+5| \leq 6$

$|x-y|$ maximaal ?

- $-2 \leq x+5 \leq 2$

$\Leftrightarrow -2-5 \leq x \leq 2-5$

$\Leftrightarrow -7 \leq x \leq -3$

- $-6 \leq y+5 \leq 6$

$\Leftrightarrow -6-5 \leq y \leq 6-5$

$\Leftrightarrow -11 \leq y \leq 1$

Dus $x \in [-7,-3]$ en $y \in [-11,1]$

maximale waarde: $x = -3$ en $y = -11$

↳ $-y = -(-11) = +11$!

11 $[2, +\infty[$

↳ een interval A is gesloten als zijn component $\mathbb{R} \setminus A$ open is.

$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 2[$ en dit interval is open!

12 neen dit klopt niet!

De som van een vermenigvuldiging ≠ vermenigvuldiging ve som!

~~Fy 2.3.1~~

<u>vb</u> $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \in \mathbb{R}$

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \ ?$$

- $$\sum_{h=1}^{6} a_k b_h = 1.7 + 2.8 + 3.9 + 4.10 + 5.11 + 6.12$$
  $$= 7 + 16 + 27 + 40 + 55 + 72$$
  $$= 217$$

- $$\left(\sum_{h=1}^{6} a_h\right)\left(\sum_{h=1}^{6} b_k\right) = (1+2+3+4+5+6) \cdot (7+8+9+10+11+12)$$
  $$= 21 + 57$$
  $$= 78$$

<u>13</u> ja! De vermenigvuldiging is commutatief!

<u>14</u> (leren we in hoofdstuk 14)

<u>15</u> volledige inductie:

- stap 1: bewijs gegeven voor $n=1$
- Stap 2: we veronderstellen dat stelling geldt voor n
- Stap 3: we bewijzen nu dat:

  Als de stelling geldt voor n, ze ook geld voor n

b. $2^n \geq 1+n$

- $2^1 \geq 1+1$

  $\Leftrightarrow 2 \geq 2$ OK

- we veronderstellen dat deze stelling geldt voor alle n.
- $2^{n+1} \geq 1 + (n+1)$

  $\Leftrightarrow 2^n . 2 \geq 2 + n$

  $\Leftrightarrow 2^n \geq 1 + \frac{n}{2}$

Als de stelling klopt voor $2^n \geq n+1$ geldt ze ook voor $n+1$ want $n+1 \geq 1 + \frac{n}{2}$

je moet het opnieuw 2^n bewijzen

onderstellen → alles maal 2 dan zie je het goed

$2n+2 \geq 2+n$

oef 15!

$$c \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\bullet \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{OK}$$

• we veronderstellen dat deze stelling geldt voor alle i

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\bullet \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)}$$

dit invullen

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

moet $\frac{n}{n+1}$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

moet je bekom

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

$\Longrightarrow$ Het geldt dus ook voor $(n+1)$

* Pagina 231

1 $x = (1,1)$ $\quad\Rightarrow\quad \|\lambda x\| = \|\mu y\| = 1$
$y = (3,4)$

- $\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda 1^2 + \lambda 1^2}$
$= \lambda\sqrt{1^2+1^2}$
$1 = \lambda\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \lambda \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

- $\|\lambda y\| = \mu\sqrt{3^2+4^2}$
$= \mu\sqrt{25}$
$= \mu 5$
$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{5}$ $\qquad \mu \in \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

2 $(x,y)(1,-2) = 0 \rightarrow (0,0),\ (2,1),\ (-2,-1) \Rightarrow (2t,t)$
Dus opl $U = \{(2t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3 $x = (-1,1,-2)$ en $y = (-1,1,1)$
want $(-1(-1) + 1.1 + (-2).1) = 0$
$(-1.1 + 1.1 + (-2).0) = 0$
$(-1.1 + 1.1 + 1.0) = 0$
$z = (\cancel{-1},1,-8)$ enkel loodrecht op $(1,1,0)$
Kan niet op alle 3 loodrecht staa

4 pythagoras: $x^2+y^2 = z^2$ / $a^2+b^2=c^2$
$\|x-y\|^2 = (x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2$
$\|x+y\|^2 = (x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2$
$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$
$\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$
$\rightarrow$ ze zijn sowieso tegengesteld dus komt altijd w

$x \perp y$ dan $x.y = 0$ op o.

$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y$
$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 \cancel{- 2x_1y_1} + x_2^2 + y_2^2 \cancel{- 2x_2y_2} = x_1^2 + y_1^2 \cancel{+ 2x_1y_1}$
$+ x_2^2 + y_2^2 \cancel{+ 2x_2y_2} = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$

5 $\|x+y\|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2$

$\|x-y\|^2 = (x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2$

$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$

stel $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_1-y_1)^2 + (x_2-\dots$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$$
$$+ x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$$
$$= 2x_1^2 + 2y^2 + 2x_1^2 + 2y_2^2$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

6 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die noch open, noch gesloten is.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ en } |y| < 1\}$

$\Rightarrow$ nt open: $y < 1$, dus y hoort er nt bij & is zogezegd de rand.
(Je kan hier nt op elk punt nr links & nr rechts)

//

[illegible] $\Rightarrow$

nt gesloten: complement $\mathbb{R} \setminus A$ is nt open & nt gesloten
(zelfde redenering maar $x > 1$ en is dus de rand)

x [illegible]
[illegible]

Oefeningen Module 3

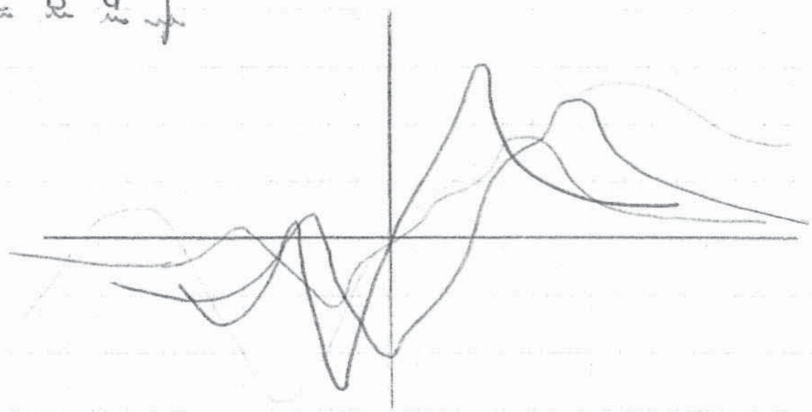
p 3.29

1 grafiek 2 en grafiek 3

⇒ voor iedere x-waarde is er hoogstens 1 y-waarde.

⇒ Een kromme is de graf v.e functie a.s.a elke verticale rechte de kromme in hoogstens 1 punt snijdt.

2 e b d f



⇒ regels: y → + : naar boven verschuiven

− : " beneden "

· : uitbreiden verticaal

/ : inkrimpen verticaal

x → + : naar links verschuiven

− : " rechts "

· : inkrimpen horizontaal

/ : uitbreiden horizontaal

3 Men noemt een functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ even als $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

oneven als $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$

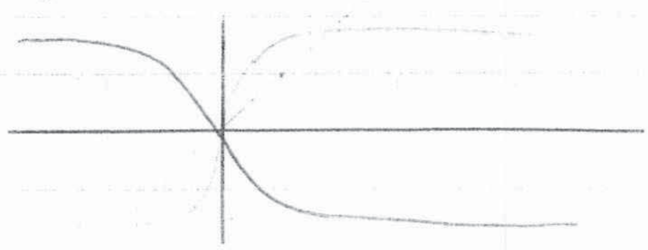
even: grafiek ligt symmetrisch t.o.v y-as

oneven: " " " " (0,0).

4 Enkel 2 is inverteerbaar.

1 niet want 1 y-waarde heeft meer als 1 x-waarde

de grafiek is niet surjectief.



5 a injectief surjectief
b nt injectief nt surjectief
c nt injectief nt surjectief
d nt injectief nt surjectief
e nt injectief surjectief

6 a injectief

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$$

b injectief

$$f^{-1}(x) = \frac{x+11}{12}$$

c injectief nt injectief → Als je grafiek vd functie tekent zie je dat er een horizontale rechte is die meerdere punten snijdt!

7 a $x \to \boxed{h}\ x+1 \to \boxed{g}\ (x+1)^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to (x+1)^2$

$x \to \boxed{g}\ x^2 \to \boxed{h}\ x^2+1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to x^2+1$

b $x \to x+1 \to x+1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to x+1$

$x \to x \to x+1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to x+1$) =

c $x \to x^2-4 \to \sqrt{x^2-4}$ def $(g \circ h) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^+$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+: x \to \sqrt{x^2-4}$

$f:]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[: x \to \sqrt{x^2-4}$

$x \to \sqrt{x} \to (\sqrt{x})^2 - 4$ $x^2-4 \geq 0$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}: x \to x-4$ $x^2 \geq 4$

$x \leq -2$ en $x \geq 2$

d $x \to x^2-3 \to \frac{1}{x^2-3-1}$ def $(g \circ h) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}\setminus$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}. \quad x \to \frac{1}{x^2-4}$

$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$ (nt surj) ↳ het domein van een functie (invullen) geeft het beeld.
MAAR $g: \mathbb{R} \to [-1,1]$ (wel surj) want $g(\mathbb{R}) = [-1,1]$

$x \to \frac{1}{x-1} \to \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 3$

$f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}: x \to \frac{1}{x^2-1} - 3$

8 $f(x) = x^3$ → natekken met rekenmachine !

$g(x) = 1$

$h_1(x) = x$

$h_2(x) = -x$

$h_3(x) = |x|$

=> in hoofd opgelost! tot => zie opl

extra vraagje: neen!

9 a $f_+: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \max\{f(x), 0\}$

b $f_-: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \min\{f(x), 0\}$

c $|f|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to |f(x)|$

=> in hoofd opgelost!

10 c gegeven: $f \circ g$ is injectief: als $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ $\Rightarrow x_1 = x_2$

Te bewijzen: f is injectief: als $f(y_1) = f(y_2)$ $\Rightarrow y_1 = y_2$

bewijs:

hoe opschrijven ?

11 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{x}{1+x^2} + \ln(2+x^4)$

samenstelling

stel $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to 1$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$

$f_5 : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R} : x \to \ln x$

- $f_4 \circ f_4 = x^4$

$f_2 + (f_4 \circ f_4) = 2 + x^4$

$f_5 \circ (f_2 + (f_4 \circ f_4)) = \ln(2+x^4)$

$f_3 / (f_1 + f_4) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$\Rightarrow (f_3 / (f_1 + f_4)) + f_5 \circ (f_2 (f_4 \circ f_4)) = \dfrac{x}{1+x^2} + \ln(2+x^4$

12 $\dfrac{(x+5).2-6}{2} - 2$

$\Rightarrow f(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{2(x+5)-6}{2} - 2$

13 $C(p) = 0{,}5p + 1$

$p(t) = 10 + 0{,}1t^2$

gevraagd: $C(t) = C \circ p$

$= x \to 0{,}5p + 1 \to 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1$

$\Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 6 + 0{,}05t^2$

a ↑

b $f(t) = 6 + 0{,}5t^2$

$\Leftrightarrow 6{,}8 = 6 + 0{,}05t^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{0{,}8}{0{,}05} = t^2$

$\Leftrightarrow t = \cancel{\pm}\ 4$

14 $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to r(t)$ $\quad r(t)$ = straal vlek op tijd t

opp $= \pi r^2$

gevraagd: functie opp in functie v tijd
$A(t)$

gegeven: $r(t)$ en $A(r)$

Dus $A(r(t)) = A \circ r$

$\Rightarrow t \to r(t) \to \pi \quad (r t)^2$

Dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to \pi \, (r(t))^2$

16 a $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to 3x^2y - 2xy + x^2 - 6y$

in $(x,y) = (1,-1)$

$\to d(1,-1) = 6$

$-3+2+1+6$
$= 6$

b $Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (K,L) \to \frac{1}{2} K^{3/4} L^{1/4}$

~~$\frac{1}{2} \; 1 \; 16^{1/4}$~~ $= 1$

in $(L,K) = (16,1)$

$\to Q(L,K) = 1$

c $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-5,-10)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \to \frac{4x}{5+x} + 4x^2y + \frac{3y}{10+y}$

in $(x,y) = (3,-3)$

$\to f(x,y) = \frac{-1503}{14}$

17 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \to (x+y, \sin x, 4xy)$

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to x+y$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to \sin x$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \to 4xy$

18 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to 4$

19 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; (x,y) \to |x-y|$

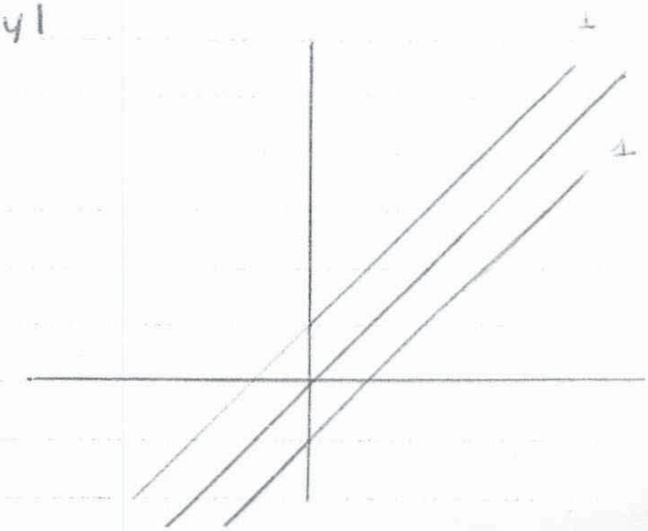
$|x-y| = 1 \Rightarrow x - y = 1$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow x - y = -1$

$\Leftrightarrow y = x + 1$

$|x-y| = 0$



$|x| =$ 

20 Een functie is een grafiek waarvoor 1 y-waarde ook hoogstens 1 x-waarde.
stel dat we een punt $p(x,y)$ waarvoor $f(x,y) = c_1$ en $f(x,y) = c_2$ met $c_1 \neq c_2$. Dan wil dit zeggen dat 1 x-waarde deze 2 y-waardes heeft en dat klopt niet.

21 $a, b, c \in \mathbb{R}$

a $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to ax + by + c$

$N_0: ax + by + c = 0$

$\Leftrightarrow by = -ax - c$

$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$N_1: ax + by + c = 1$

$\Leftrightarrow by = -ax - c + 1$

$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c+1}{b}$

...

=> De niveaulijnen hebben allemaal dezelfde rico & zijn dus evenwijdig.

b $ax + by + c$

- a wijzigen: wijziging vd rico
- b wijzigen: " " " + wijziging v. plaats de y-as
- c wijzigen: wijziging snijpunt f met y-as.

=> in hoofd nadenken

c $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to mx + d$ $(m, d \in \mathbb{R})$

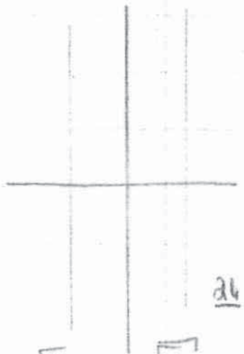
- m & a: geeft Δ van de y-coördinaat / z-coördinaat als x met 1 toeneemt.
- b geeft Δ van z-coördinaat als y met 1 toeneemt
- $(0,d)$ / $(0,0,c)$ zijn snijpunten vd grafiek met de y-as / z-as.

23. waar

De niveaulijnen v.e. functie met een voorschrift $f(x,y) = ax + b$ (dus van een vlak) zijn altijd evenwijdige rechten.

vals $\quad (x,y)$ zodat $f(x,y) = k$

$\Leftrightarrow ax + by + c = k$



$-\sqrt{k} \quad \sqrt{k}$

niet waar

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to x^2 \qquad f(x,y) = k \quad (k > 0)$

$\Leftrightarrow x^2 = k$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{k}$ of $x = -\sqrt{k}$

24 a $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to y - (x+2)^2 - 7$

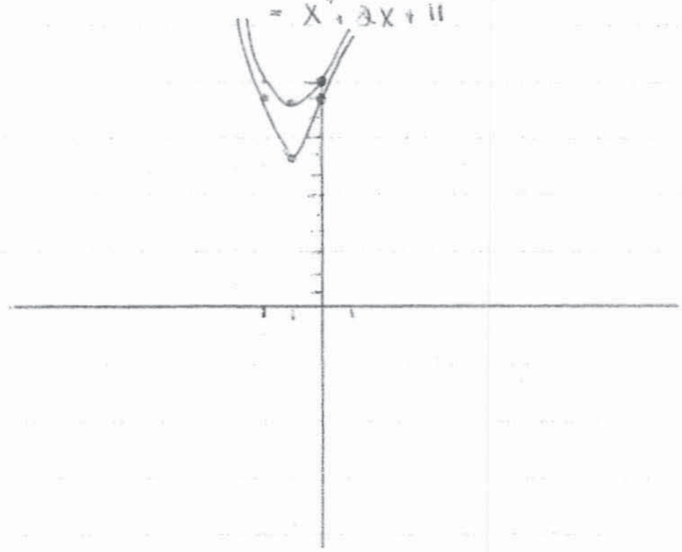
- $N_0: \; y - (x+2)^2 - 7 = 0$

$\Leftrightarrow y - (x^2 + 4 + 2x) - 7 = 0$

$\Leftrightarrow y - x^2 - 4 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2 + 4 + 2x + 7$

$= x^2 + 2x + 11$



- $N_1 \; y - x^2 - 4 - 2x - 7 = 1$

$\Leftrightarrow y = 1 + x^2 + 4 + 2x + 7$

$y = x^2 + 2x + 12$

b $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to (x+2)y$

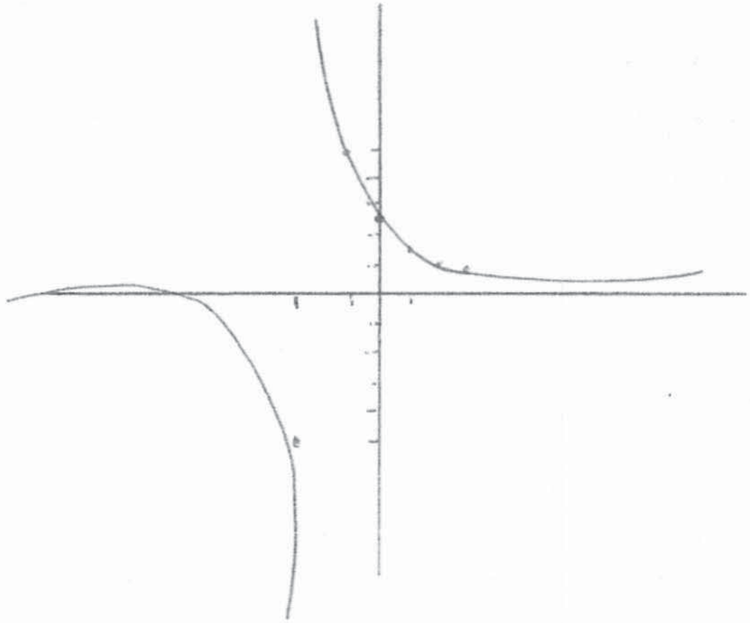
- $N_0: \; (x+2)y = 0$

$\Leftrightarrow xy + 2y = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$

- $N_2: \; (x+2)y = 5$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5}{x+2}$



c $j: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to x^2 - y^2$

- N_0: $x^2 - y^2 = 0$

  $\Leftrightarrow y^2 = x^2$

  $\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2}$

  $\Leftrightarrow y = x$

- N_{-36}: $x^2 - y^2 = -36$

  $\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 36$

  $\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 36}$

=> volledige oef zie oplossingenbundel

25 $Q: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}: (K,L) \to Q(K,L) = \sqrt{KL}$

- N_1: $\sqrt{KL} = 1$

  $\Leftrightarrow KL = 1$

  $\Leftrightarrow L = \frac{1}{K} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

- N_3: $\sqrt{xy} = 3$

  $\Leftrightarrow xy = 3^2$

  $\Leftrightarrow y = \frac{9}{x}$

26 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to x^2y - 3xy$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \to (t,t^2)$

$f \circ g$:

$x \quad \boxed{g} \quad (t,t^2) \quad \boxed{f} \quad t^2 \cdot t^2 - 3\, t \cdot t = t^4 - 3t^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to t^4 - 3t^3$

$g \circ f \quad x \quad \boxed{f} \quad x^2y - 3xy \quad \boxed{g} \quad (x^2y - 3xy, (x^2y-3xy)^2)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x^2y - 3xy, x^4y^2 + 9x^2y^2 - 6x^3y^2)$

27 a $x_n = n^2 - n + 3$

$x_1 = 3$

$x_2 = 5$

$x_3 = 9$ $\Rightarrow$ eerste 6 termen is van x_0 tot x_5

$x_4 = 15$ Dus $(3,3,5,9,15,23)$

$x_5 = 23$

$x_6 = 33$

b $x_n = 1 + (-1)^n$

$x_0 = 2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = 0$

$x_4 = 2$

$x_5 = 0$

$(2,0,2,0,2,0)$

28 $x_n = n^2 + 4n + 2$

$\Rightarrow$ deze formule is uniek!

29 a $x_0 = 5$; $x_1 = 8$; $x_2 = 11$; $x_3 = 14$; $x_4 = 17$; $x_5 = 20$; $x_6 = 23$

$(5,8,11,14,17,20,23)$

$x_n = x_{n-1} + 3$

$= 3n + 5$

b $x_0 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $x_3 = 6$; $x_4 = 24$; $x_5 = 120$; $x_6 = 720$

$(1, 1, 2, 6, 24, 120, 720)$

$x_n = n!$

c $x_0 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; $x_4 = 5$; $x_5 = 8$, $x_6 = 13$

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)$

3 a waar

Een rekenkundige rij ontstaat door er een vast getal v bij op te tellen. Door hier dan nog een andere rekenkundige rij bij op te tellen blijft deze structuur bestaan.

b vals

c vals

d waar

a $\cancel{x_n + y_n = a + nv + a + nv}$

$\cancel{= 2a + 2(nv)}$

~~= rekenkundige rij~~

b $\cancel{x_n + y_n = ar^n + ar^n}$

$\cancel{= 2ar^n}$

a $x_n = a + nv$

$y_n = b + nw$

Dus $x_n + y_n = a + nv + b + nw$

$= (a + b) + n(v + w)$

$\Rightarrow$ $v + w$ is factor

Dus nog steeds rekenkundig

b $x_n = ar^n$

$y_n = br^m$

Dus $x_n + y_n = ar^n + br^m$

...

31 $X_n = 10\,000 + (0{,}0575 \cdot X_{n-1})$

$\Rightarrow$ ~~$X_5 = 10\,000 + (0{,}0575 \cdot X_4)$~~

$\Rightarrow$ Hoeveel is het nu waard: $\dfrac{10\,000}{(1{,}0575)^5} = 7561{,}33$

want: een bedrag maal de intrest op 5 jaar tijd $\Rightarrow x \cdot (1{,}0575)^5 = 10\,000$

32 leent € 100 000

20 jaar

intrest 7%

(i) ~~$100\,000 \cdot \dfrac{(1{,}07)^{20} - 1}{(1{,}07) - 1} = 4\,099\,549{,}232$~~

~~$100\,000 \cdot \dfrac{(1{,}07)^{19} - 1}{(1{,}07) - 1} = 448\,6517{,}678$~~

~~$100\,000 \cdot \dfrac{(1{,}07)^{19} - 1}{(1{,}07) - 1} =$~~

$\Rightarrow x \cdot (1+i)^n =$ we hebben een bedrag x en zetten dat uit over een jaar n tegen een intrestvoet van i procent.

Dus: $100\,000\,(1{,}07)^{20} = 386\,968{,}45$

(ii) K ? $386\,968{,}45 = K\,\dfrac{(1{,}07)^{20} - 1}{(1{,}07) - 1}$

$\Leftrightarrow K = 9439{,}31$

33 bedrag B
20 jaar
max 7000 / j.
7% indrest

$$K = \frac{u^n - 1}{u - 1} \cdot \frac{1}{u^n} = A$$

$$= 7000 \cdot \frac{(1{,}07)^{20} - 1}{(1{,}07) - 1} \cdot \frac{1}{(1{,}07)^{20}}$$

$$= 74158{,}1$$

⇒ Hij zal maximaal een bedrag van € 74158,1 mogen ontlenen.

Oefeningen Module 4

Nodige voorw omdat alle lineaire stelsels homogeen zijn, maar nt alle homogene lineair.

Dat een stelsel homogeen is, is nt voldoende maar wel nodig.

(anders is het zeker gn lineair stelsel)

1 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f(0,0) = (0,0,0)$ is een nodige voorwaarde opdat f lineair zou zijn.

De voldoende voorwaarden zijn:
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

2 a $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = \dfrac{-2-1}{3-2}(x-2)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -3x + 6$

$\Leftrightarrow y = -3x + 7$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to -3x + 7$

b $y - y_1 = -3(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 2 = -3(x - 1)$

$\Leftrightarrow y - 2 = -3x + 3$

$\Leftrightarrow y = -3x + 5$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to -3x + 5$

c $y = ax + b$

$\Leftrightarrow y = 2x - 8$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to 2x - 8$

3 $p_1(x_0, y_0)$ & $p_2(x_1, y_1)$ met $x_0 \neq x_1$

? $f(x_0) = y_0$ & $f(x_1) = y_1$

$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1) + y_1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to y_1 + \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1)$

5 a $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 100,0 = m(x - 760)$

$\Leftrightarrow y - 100,0 = \frac{100,7 - 100,0}{780 - 760}(x - 760)$

$\Leftrightarrow y - 100,0 = 0,035(x - 760)$

$\Leftrightarrow y = 0,035x - 26,6 + 100,0$

$\Leftrightarrow y = 0,035x + 73,4$

Dus $j(735) = (0,035)(735) + 73,4$

$= 99,125$

b $98 = 0,035x + 73,4$

$\Leftrightarrow 98 - 73,4 = 0,035x$

$\Leftrightarrow \frac{98 - 73,4}{0,035} = x$

$\Leftrightarrow x = 702,86$

formule in $[700, 720]$

$d(T) = 700 + \frac{(720 - 700)}{(98,5 - 97,7)} \cdot (c - 97,7)$

$\Rightarrow d(98) = 707,5$.

(niet de formule uit a) gebruiken, want is het verkeerde interval !)

Oefeningen Module 5

+ Pagina 5.20

1
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 6R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 10 & -39 \\ 0 & -4 & 15 & -56 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 10 & -39 \\ 0 & 0 & -5 & 22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{5}R_3]{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 39/2 \\ 0 & 0 & 1 & -22/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 10 \\ y - 5z = 39/2 \\ z = -22/5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 37/10 \\ y = -5/2 \\ z = -22/5 \end{cases}$$

oplossingsverz. $V = \{(37/10, -5/2, -22/5)\}$

a ↑

b
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{7}R_3]{R_2 \to -\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -11/7 & -10/7 \\ 0 & 1 & -11/7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -11/7 & -10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{array}\right)$$

oplossingsverz. $V = \emptyset$

c
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Aantal rijen: 2
Aantal kolommen: 4
=> 2 vrijheidsgraden

$\mu = t$
$\lambda = 2$
$y = 1 + 2\lambda - 2\mu$
$x = 2 - 2y + 3\lambda - 2\mu$
$= 2 - 2(1 + 2\lambda - 2\mu) + 3\lambda - 2\mu$
$= 2 - 2 - 4\lambda + 4\mu + 3\lambda - 2\mu$
$= -\lambda + 2\mu$

oplverz $V = \{(-\lambda + 2\mu,\ 1 + 2\lambda - 2\mu,\ \lambda,\ \mu) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$

d
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{2}{5}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ y + \frac{1}{4}z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

οπότε $U = \{(0,0,0)\}$

e $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 29 \\ 1 & 3 & 30 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & 51 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 30 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 29 \\ 3 & -3 & 3 & 51 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 30 & 6 \\ 0 & -10 & -89 & 11 \\ 0 & -12 & -87 & 33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{10}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 30 & 6 \\ 0 & 1 & 89/10 & -11/10 \\ 0 & -12 & -87 & 33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 12R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 30 & 6 \\ 0 & 1 & 89/10 & -11/10 \\ 0 & 0 & 99/5 & 99/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{5}{99}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 30 & 6 \\ 0 & 1 & 89/10 & -11/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 30z = 6 \\ y + 89/10\, z = -11/10 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 30 = 6 \\ y + 89/10 = -11/10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -24 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6$$

oplossing $V = \{(6, -10, 1)\}$

j) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z + u = 0 \\ u = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z = \lambda$$
$$y = 1/2 - \lambda$$
$$x = 1 - y - z$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} = \frac{1}{2}$$

oplossing $V = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \lambda, \lambda, -\frac{1}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

9 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 7/5 & 31/5 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 7/5 & 31/5 \\ 0 & 0 & -18/5 & -54/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{5}{18} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 7/5 & 31/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 7/5\, z = 31/5 \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\iff x = 1$$

oplost $V = \{(1,2,3)\}$

i $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -8 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6/5 & 8/5 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4\mu = 5 \\ y + z + 6/5\ \mu = 8/5 \\ z = \lambda \\ \mu = \mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3\lambda + 4\mu = 5 \\ y + \lambda + \frac{6}{5}\mu = \frac{8}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 - 3\lambda - 4\mu \\ y = \frac{8}{5} - \lambda - \frac{6}{5}\mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + 2\left(\frac{8}{5} - \lambda - \frac{6}{5}\mu\right) = 5 - 3\lambda - 4\mu$

$\Leftrightarrow x + \frac{16}{5} - 2\lambda - \frac{12}{5}\mu = 5 - 3\lambda - 4\mu$

$\Leftrightarrow x = 5 - \frac{16}{5} - 3\lambda + 2\lambda - 4\mu + \frac{12}{5}\mu$

$= \frac{9}{5} - \lambda - \frac{8}{5}\mu$

oplverz $V = \{ (\frac{9}{5} - \lambda - \frac{8}{5}\mu, \frac{8}{5} - \lambda - \frac{6}{5}\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu$

2 a) $3x + 2a = 1$

$\Leftrightarrow 3x = 1 - 2a$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a$

$= \frac{1-2a}{3}$

oplvera = $\left\{ \frac{1-2a}{3} \right\}$

b. $ax + 3 = 6$

$\Leftrightarrow ax = 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{a}$ ouw $a \neq 0$

- Als $a \neq 0$: oplvera $V = \left\{ \frac{3}{a} \right\}$
- Als $a = 0$: oplvera $V = \emptyset$

d $ax = bx$

$\Leftrightarrow ax - bx = 0$

$\Leftrightarrow x(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{0}{(a-b)}$ ouw $a - b \neq 0$

$a \neq b$

- Als $a \neq b$: oplvera $V = \left\{ \frac{0}{(a-b)} \right\} = \{0\}$
- Als $a = b$. oplvera = $\mathbb{R}$

3 a $\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{1-a^2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

ovw $a \neq 1$

$a \neq -1$

$x + x - 1 = 0$ [illegible]

- Als $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ opl $= \{(0,1)\}$
- Als $a = 1$: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

$\Rightarrow x + y = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

opl $V = \{(1-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

- Als $a = -1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow x - y = -1$

$\begin{cases} y = \lambda \\ x = -1 + \lambda \end{cases}$

opl $V = \{(-1+\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

d $$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 5a & 3b & 3 & 0 \\ 4a & b & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & -2b & -2 & -5 \\ 0 & -3b & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to (-1)R_3]{R_2 \to R_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 2b & 2 & 5 \\ 0 & 3b & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 2b & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Oplverz = $\{\emptyset\}$

b $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & a-2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to \left(-\frac{1}{5}\right)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & a-24 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-14 \end{array}\right)$

- Als $a = 14$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$

  Stel $z = \lambda$; $y = 2 + 2\lambda$; $x = 6 - 2(2 + 2\lambda) + 3\lambda$

  oplverz $= \{(2 - \lambda,\ 2 + 2\lambda,\ \lambda) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Als $a \neq 14$:
  oplverz $= \emptyset$

c $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & -1-2a & -1 & a+ \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to \left(-\frac{1}{a}\right)R_2}$ ovw $a \neq 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-2a & -1 & a+1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - (-1-2a)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-2a & a+1 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2(a+1) & a+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{want } a \neq -1]{R_3 \to \frac{R_3}{a+1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \left(-\frac{1}{2}\right) R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

- Als $a \neq 0$ en $a \neq -1$: oplverz $= \left\{\left(\frac{a}{2}+1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

- Als $a = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

stel $z = \lambda$; $y = -1-\lambda$; $x = \underbrace{-\lambda + 1 + \lambda}_{= 1}$

oplverz $= \{(1, -1-\lambda, \lambda) \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$

- Als $a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

stel $z = \lambda$, $y = \lambda$; $x = -\lambda$

oplverz $= \{(-\lambda, \lambda, \lambda) \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$

c

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{1-a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

$a \neq 1$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - (1-a^2)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{2-a-a^2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$a \neq -2$

- Als $a \neq 1 \wedge a \neq -2$: $z = 0 = y$

$x = -z - ay$
$= 0$

oplverz $= \{(0,0,0)\}$

- Als $a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Stel $z = \lambda$ en $y = \mu$

Dan is $x = -\lambda - \mu$

oplverz $= \{(-\lambda-\mu, \mu, \lambda) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Als $a = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

stel $z = \lambda$; $y = \lambda$; $x = -\lambda + 2\lambda$
$= \lambda$

oplverz $= \{(\lambda, \lambda, \lambda) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

4. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -9 & -6 & -15 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 9 & 5 & 8 & 24 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 15 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 15 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

stel $t = \lambda$; $s = -7\lambda$; $z = \mu$; $y = 8 - 3\mu - \frac{5}{3}(-7\lambda) - \frac{8}{3}\lambda$
$= 8 - 3\mu + 9\lambda$

$x = 11 - 2 \cdot (8 - 3\mu + 9\lambda) - 3\mu - 2(-7\lambda) - 4\lambda$
$= -5 + 3\mu - 8\lambda$

oplverz $= \{(-5 + 3\mu - 8\lambda, 8 - 3\mu + 9\lambda, \mu, -7\lambda, \lambda) \ / \ \lambda, \mu$

- $(1, 2, 2, 00) \rightarrow$ Vrijztal $\in \mathbb{N}$

- $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & b \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & -3 & -9 & -5 & -8 & b - 3a \\ 0 & -3 & -9 & -6 & -15 & c - 4a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & -3 & -9 & -6 & -15 & c - 4a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -7 & -a - b + c \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & a + b - c \end{array}\right)$$

... en dan gewoon verder uitwerken!

5 rij-operatie (a) en (b)

$\Rightarrow$ je mag de rij waar je een operatie op wil uitvoeren, nooit in de veelbak gooien!

6 A : € 20 VK

€ 0,30 bel

€ 0,10 sms

B : € 25 VK

€ 0,20 bel

€ 0,05 sms

a $p_A = 20 + 0{,}30x + 0{,}10y$ met x = aantal belminuten

y = aantal verst sms'en

b $p_B = 0{,}20s + 0{,}05t + 25$ met s = aantal belminuten

t = aantal sms'en

c $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}30 & 0{,}10 & 20 & 32 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 25 & 32 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{0{,}30}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 25 & 32 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - (0{,}20)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0 & -1/60 & 35/3 & 32/3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to -60 R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & b & s & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0 & 1 & -700 & -640 \end{array}\right) \end{array}$

$\Rightarrow s = -640 + 700$

$= 60$

$b = \frac{320}{3} - \frac{200}{3} - \frac{1}{3} \cdot 60$

$= 20$

- $(1, 2, 2, \infty) \to$ kijftal $\in \mathbb{N}$

- $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & b \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & c \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & -3 & -9 & -5 & -8 & b-3a \\ 0 & -3 & -9 & -6 & -15 & c-4a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & -3 & -9 & -6 & -15 & c-4a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -7 & -a-b+c \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 5/3 & 8/3 & a - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & a+b-c \end{array}\right)$$

... en dan gewoon verder uitwerken!

5 rijoperatie (a) en (b)

$\Rightarrow$ je mag de rij waar je een operatie op wil uitvoeren, nooit in de veelvoud gooien!

6 A : € 20 VK

€ 0,30 bel

€ 0,10 sms

B : € 25 VK

€ 0,20 bel

€ 0,05 sms

a $p_A = 20 + 0{,}30\,x + 0{,}10\,y$ met x = aantal belminuten

y = aantal verst sms'en

b $p_B = 0{,}20\,s + 0{,}05\,t + 25$ met s = aantal belminuten

t = aantal sms'en

c $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}30 & 0{,}10 & 20 & 32 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 25 & 32 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{0{,}30}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 25 & 32 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - (0{,}20)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0 & -1/60 & 35/3 & 32/3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to -60 R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 200/3 & 320/3 \\ 0 & 1 & -700 & -640 \end{array}\right) \end{array}$

$\Rightarrow s = -640 + 700$

$= 60$

$b = \frac{320}{3} - \frac{200}{3} - \frac{1}{3} \cdot 60$

$= 20$

1 premies? - vermogen
- bonus-malus-graad
- leeftijd
- aantal km

36 j	→	1	x
10 000 km	→	2	u
graad 8	→	3	y
26 kW	→	2	z

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 25 & 2 & 73 & 4000 & 420 \\ 29 & 4 & 81 & 4500 & 460 \\ 42 & 6 & 48 & 21500 & 540 \\ 63 & 9 & 105 & 17000 & 800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{25}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/25 & 73/25 & 160 & 84/5 \\ 29 & 4 & 81 & 4500 & 460 \\ 42 & 6 & 48 & 21500 & 540 \\ 63 & 9 & 105 & 17000 & 800 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - 29R_1$, $R_3 \to R_3 - 42R_1$, $R_4 \to R_4 - 63R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/25 & 73/25 & 160 & 84/5 \\ 0 & 42/25 & -92/25 & -140 & -136/5 \\ 0 & 66/25 & -1866/25 & 14780 & -828/5 \\ 0 & 99/25 & -1974/25 & 6920 & -1292/5 \end{array}\right)$$

$R_2 \to 25R_2$, $R_3 \to 25R_3$, $R_4 \to 25R_4$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/25 & 73/25 & 160 & 84/5 \\ 0 & 42 & -92 & -3500 & -680 \\ 0 & 66 & -1866 & 369500 & -4140 \\ 0 & 99 & -1974 & 240500 & -6460 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{42}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2/25 & 73/25 & 160 & 84/5 \\ 0 & 1 & -46/21 & -250/3 & -340/21 \\ 0 & 66 & -1866 & 369500 & -4140 \\ 0 & 99 & -1974 & 240500 & -6460 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 & 420 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 460 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 460 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 420 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 800 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & 620 \\ 0 & 11 & 2 & 11 & 1740 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 820 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 155 \\ 0 & 11 & 2 & 11 & 1740 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 820 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 11R_2 \\ \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - 5R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 155 \\ 0 & 0 & 2 & -11/4 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 155 \\ 0 & 0 & 1 & -11/8 & 35/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + \left(\frac{-2}{11}\right) R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 155 \\ 0 & 0 & 1 & -11/8 & 35/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{460}{11} \end{array}\right)$$

$R_4 \to -\dfrac{R_4}{13}$ $\to$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 155 \\ 0 & 0 & 1 & -11/8 & 35/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -220/13 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
u &= -220/13 \\
z &= 35/2 + 11/8\,(-220/13) \\
&= 35/2 - 605/26 \\
&= -75/13 \\
y &= 155 - 5/4\,(-220/13) \\
&= 155 + 275/13 \\
&= 2290/13 \\
x &= 540 - 3\,(-220/13) + 75/13 - 3\,(2290/13) \\
&= 540 + 660/13 + 75/13 - 6870/13 \\
&= 885/13
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{885}{13} + 3\left(\frac{2290}{13}\right) + 2\left(\frac{-75}{13}\right) + 2\left(\frac{-220}{13}\right)$$

$$= \frac{885}{13} + \frac{6870}{13} - \frac{150}{13} - \frac{440}{13}$$

$$= 551{,}15 = \frac{7165}{13}$$

$\to$ Juiste methode! Maar uitkomst klopt niet!

8 a
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 10 \\ x_2 + 5 = x_3 \\ x_3 = 12 + x_4 \\ x_4 + 15 = x_5 \\ x_5 = 8 + x_6 \\ x_6 + 10 = x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 10 \\ x_3 - x_2 = 5 \\ x_4 - x_3 = -12 \\ x_5 - x_4 = 15 \\ x_6 - x_5 = -8 \\ x_6 - x_1 = -10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_5}
\begin{array}{cccccc|c}
x & y & z & u & v & w & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

stel $w = \lambda$

$v = 8 + \lambda$

$u = -15 + 8 + \lambda \quad = -7 + \lambda$

$z = 12 - 15 + 8 + \lambda \quad = 5 + \lambda$

$y = -5 + 12 - 15 + 8 + \lambda \quad = \lambda$

$x = 10 - 5 + 12 - 15 + 8 + \lambda \quad = 10 + \lambda$

$$\text{oplossing} = \{(\underset{x_1}{10+\lambda}, \underset{x_2}{\lambda}, \underset{x_3}{5+\lambda}, \underset{x_4}{-7+\lambda}, \underset{x_5}{8+\lambda}, \underset{x_6}{\lambda}) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c $X_6 \geq 7$!

* Pagina 5.25

1

$$\begin{pmatrix}
-2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\
1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\
3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\
1 & 7 & -13 & 5 & -3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_1}
\begin{pmatrix}
1 & 7 & -13 & 5 & -3 \\
1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\
3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\
-2 & -5 & 8 & 0 & -17
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 + 2R_1}]{R_2 \to R_2 - R_1}
\begin{pmatrix}
1 & 7 & -13 & 5 & -3 \\
0 & -4 & 8 & -4 & 8 \\
0 & -10 & 20 & -8 & 10 \\
0 & 9 & -18 & 10 & -23
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-4}}
\begin{pmatrix}
1 & 7 & -13 & 5 & \\
0 & 1 & -2 & 1 & \\
0 & -10 & 20 & -8 & \\
0 & 9 & -18 & 10 &
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 9R_2]{R_3 \to R_3 + 10R_2}
\begin{pmatrix}
1 & 7 & -13 & 5 & -3 \\
0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{2}}
\begin{pmatrix}
1 & 7 & -13 & 5 & -3 \\
0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5
\end{pmatrix}$$

1 a $Q_v = Q_A$

$\Leftrightarrow 25 - \frac{1}{2}p = -50 + 2p$

$\Leftrightarrow 75 = \frac{5}{2}p$

$\Leftrightarrow$ ...

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dus rang : 3

2 a 3
b 2
c 2
d 3
e 3
f 3
g 3
i 2

3 • Als het stelsel oplosbaar is:
Dan is de rang van A = rang (A|B) < rang (A)+
→ De stelling klopt

• Als het stelsel nt oplosbaar is:
Dan is de rang van A sowieso kleiner als deze van (A/B)
Maar waarom juist 1 kleiner?
→ Dit geldt alleen wanneer de matrix in echelonvorm staat en dan kan het niet anders dat er maar 1 vergelijking in zit die strijdig is
vb rang A = n-2 ; rang (A/B) = n

$$\begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \omega \quad \begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oefeningen Module 6

* pagina 6.23

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-2b \\ 1 & 4 & 3 \\ 2008 & 6 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2008 & 6 & 3a-b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=2 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2+2b \\ 3(2+2b)-b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2+2b \\ 6+6b-b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} a=2+2b \\ 5b=-5 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=0 \end{cases}$$

Dus. $a-2b=2$

$3a-b=1$

2 $$2A = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3B = 3\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 6 & -15 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & -4 \\ 8 & -7 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

3. $\cdot$ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ $(AB).C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 \\ 5 & 2 & 7 \\ 32 & 12 & 44 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ $B.C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ $A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 \\ 5 & 2 & 7 \\ 32 & 12 & 44 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eigenschap $A(BC) = (AB)C$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$\Rightarrow$ De matrix vermenigvuldiging is associatief!

4 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ eigenschap. $AB \neq BA$

$\Rightarrow$ De matrix vermenigvuldiging is nt commutatief.

5 . $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 11/6 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -4/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Ans: the inverse is $\begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & 1/6 \\ -4/3 & 5/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Dus: De matrix is nt inverteerbaar want de rang is 3 en $n = 4$!

$$\bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{5}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{2}{5} R_3]{R_1 \to R_1 + \frac{6}{5} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

Dus: de inverse is $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6 d verband tss A, B & C : A.B = C

$$x = 1\,\varepsilon + 0{,}1\,\mu + 0{,}3\,\lambda + 0{,}4\,s + 0{,}4\,t$$
$$y = 0\,\varepsilon + 0{,}35\,\mu + 0{,}5\,\lambda + 0{,}5\,s + 0{,}4\,t$$
$$z = 0\,\varepsilon + 0{,}55\,\mu + 0{,}2\,\lambda + 0{,}1\,s + 0{,}2\,t$$

Dus: $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 6 & 11 & 26 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu \\ \lambda \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10{,}5 & 9 & 10 \\ 6 & 18{,}75 & 12{,}5 & 10{,}5 & 12 \\ 1 & 3{,}75 & 2 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu \\ \lambda \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ v \\ w \end{pmatrix}$

7 $B = \begin{pmatrix} 8 & 38 & 14 \\ 6 & 32 & 4 \end{pmatrix}$

$K_B = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 46 & 7 & 1 & 28 \\ 35 & 7 & 1 & 25 \end{pmatrix}$

$K_M = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}08 & 0{,}4 & 0{,}12 \end{pmatrix}$

jongens: € 2,5

meisjes: € 3

$C = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \end{pmatrix}$

a $B.K_B = \begin{pmatrix} 8 & 38 & 14 \\ 6 & 32 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}05 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$

b $B.K_B + M.K_M + extra$

- $B.K_B = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 28 \end{pmatrix}$

- $M.K_M = \begin{pmatrix} 46 & 7 & 1 & 28 \\ 35 & 7 & 1 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0,08 \\ 0,4 \\ 0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61,82 \\ 47,71 \end{pmatrix}$

- $extra = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4,8 \\ 2,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61,82 \\ 47,71 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,12 \\ 53,51 \end{pmatrix}$

c $(B.K_B)\cdot C = \begin{pmatrix} 25 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,8 \\ 2,8 \end{pmatrix}$

$= 260$

d $C.B = \begin{pmatrix} 25 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 38 & 14 \\ 6 & 32 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 500 & 2550 & 550 \end{pmatrix}$

e $C.M = \begin{pmatrix} 25 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & 7 & 1 & 28 \\ 35 & 7 & 1 & 25 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2900 & 525 & 75 & 1950 \end{pmatrix}$

f $(C.M).K_M^T = \begin{pmatrix} 2900 & 525 & 75 & 1950 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0,08 \\ 0,4 \\ 0,12 \end{pmatrix}$

$= 3931$

9 $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix}$

- $AB = \begin{pmatrix} 1200 \\ 780 \\ 1020 \end{pmatrix}$

- $A.AB = \begin{pmatrix} 1320 \\ 612 \\ 1068 \end{pmatrix}$

<u>10</u>

0	0,6	50 %
1	3,5	75 %
2	2,4	75 %
3	1,2	

a

	0	1	2	3
0	0,6	3,5	2,4	1,2
1	0,5	0	0	0
2	0	0,75	0	0
3	0	0	0,75	0

b
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

c
$$\begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 645 \\ 190 \\ 95 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1364 \\ 322,5 \\ 142,5 \\ 71,25 \end{pmatrix}$$

vroeger: waren er 1000 dieren
nu: zijn er 1900,25 dieren

toegenomen met 900,25 !

d
$$\begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 175 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Er zijn maar 385 dieren. (is met 35 toegenomen)

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 175 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 738,5 \\ 105 \\ 131,25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 3,5 & 2,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 738,5 \\ 105 \\ 131,25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1125,6 \\ 369,25 \\ 78,75 \\ 98,44 \end{pmatrix}$$

11 a $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

vals

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b vals

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

c waar

uitwerken: $I_n - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \dots + A^k - A^{k+1}$

$= I_n - A^{k+1}$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+z&y+t\\x+z&y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dat gaat niet!

→ Nt de moeilijk ...aken!
Voorwaarde $A \neq -B$ Dus $A+B \neq 0$

Dus we kiezen een matrix $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

→ matrices v.d. vorm $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ zijn nooit inverteerbaar

Dus $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ uitspraak is vals!

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/7&37/28&3/4&0&0\\0&1&59/76&7/76&7/19&0\\0&0&84/19&-105/19&-7/3&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{19}{84}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/7&37/28&3/4&0&0\\0&1&59/76&7/76&7/19&0\\0&0&1&-5/4&-19/36&19/28\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1+\frac{1}{7}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&23/19&14/19&-1/19&0\\0&1&59/76&7/76&7/19&0\\0&0&1&-5/4&-19/36&19/28\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1-\frac{92}{59}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&35/59&-37/59&0\\0&1&59/76&7/76&7/19&0\\0&0&1&-5/4&-19/36&19/28\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2-\frac{59}{76}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&35/59&-37/59&0\\0&1&0&17/16&2129/2236&3/113\\0&0&1&-5/4&-19/36&19/12\end{array}\right)$$

11 d.

12 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

vb $A^k=0$ $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\to I_n - A^k = (I_n + A + A^2 + \dots A^{k-1})(I_n - A)$$
$$\Leftrightarrow I_n - 0 = (I_n + A + A^2 + \dots A^{k-1})(I_n - A)$$
$$\Leftrightarrow I_n = \underbrace{(I_n + A + A^2 + \dots A^{k-1})}(I_n - A)$$

→ is de inverse van $(I_n - A)$
want product is eenheidsmatrix.

13 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$C = f \circ g = f(g(x))$

a $C = f \circ g = f(g(x))$

$$= f\left(B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= f\begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 \; 6y_3 \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(y_1 + 2y_2 + 3y_3) - 2(4y_2 + 5y_2 + 6y_3) \\ -4(y_1 + 2y_2 + 3y_3) + 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 - 8y_1 - 10y_2 - 12y_3 \\ -4y_1 - 8y_2 - 12y_3 + 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5y_1 - 4y_2 - 3y_3 \\ -3y_2 - 6y_3 \end{pmatrix}$$

extra: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin x$

$(f \circ g)(x) = \sin^2 x + 1$

$(g \circ f)(x) = \sin(x^2 + 1) \Leftrightarrow g(x^2 + 1)$

$\underline{b}$ $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

$AB = C$!

↳ de matrix van $f \circ g$ is bep door het product
vd matrices v f & g

Oefeningen Module 7

* pagina 7.13

1 $6x - 2y = 26$

$\Leftrightarrow 6.3 - 2.(-4) = 18 + 8$

$= 26$

2 $a = (2,1)$; $b = (3,-2)$

$c = (7,0)$; $d = (1,4)$

$x = (1-\lambda).2 + \lambda 3$

$= 2 - 2\lambda + 3\lambda$

$= 2 + \lambda$

$y = (1-\lambda)1 + \lambda(-2)$

$= 1 - \lambda - 2\lambda$

$= 1 - 3\lambda$

Dus ab. $3x + y = 7$

$x = (1-\lambda)7 + \lambda.1$

$= 7 - 7\lambda + \lambda$

$= 7 - 6\lambda$

$y = (1-\lambda)\,0 + \lambda\,4$

$= 4\lambda$

Dus cd: $y - 0 = m(x-7)$

$\Leftrightarrow y = \frac{4-0}{1-7}(x-7)$

$\Leftrightarrow y = \frac{4}{-6}(x-7$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

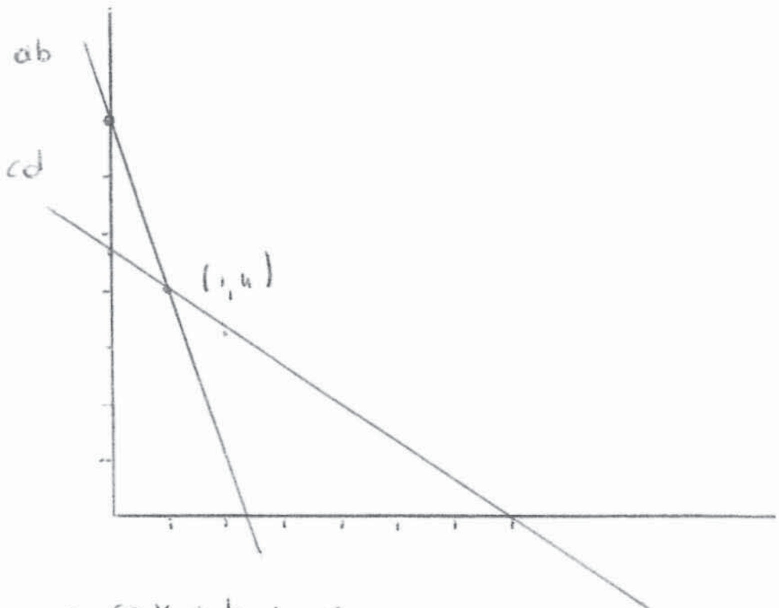
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x + y = \frac{14}{3}$

$\Leftrightarrow 2x + 3y = 14$

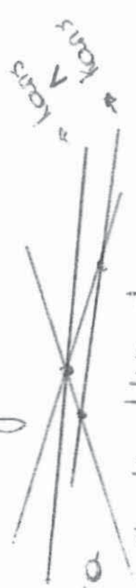
$$\begin{cases}3x+y=7\\2x+3y=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7-3x\\2x+3(7-3x)=14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=7-3x\\2x+21-9x=14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$$



Als we twee rechten tekenen is de kans enorm groot dat deze twee rechten elkaar snijden in 1 punt!
MAAR vanaf dat moment a bij iedere extra rechten de kans dat ze snijden in 1 punt steeds kleiner!

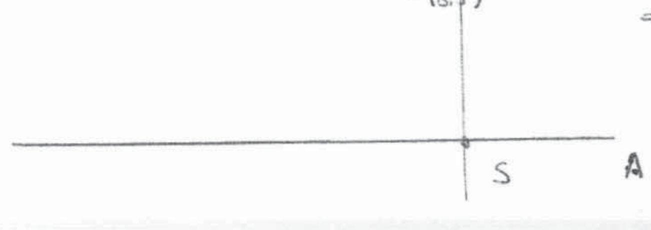


3 $$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\\a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$$

Deze vergelijkingen zijn slechts oplosbaar als de matrix $\left(\begin{array}{cc|c}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{array}\right)$ inverteerbaar is.

Dan moet dus ook $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$
⇒ Dit komt nt vaak voor!

4 A: $3x+2y=8$
$p\ (8,5)$



⇒ afstand v punt p tot recht A is afstand tss punt p en punt s.

- vergl vd recht ps (loodrecht op A)

$$\Leftrightarrow \langle (2,-3)(x,y)\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3y = 0$$
ob $(3,2)$

Dus $ps = -2x + 3y = ?$
$$\Leftrightarrow -2.8 + 3.5 = -1$$

- stelsel oplossen: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Dus $S(2,1)$

- Afstand tss punten p & s: $\|(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{(8-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{52}$$
$$\approx 7,21$$

5 vitaminen: 400
mineralen: 500
calorien: 1400
$V_1 \to 15$ cent
$V_2 \to 9$ cent

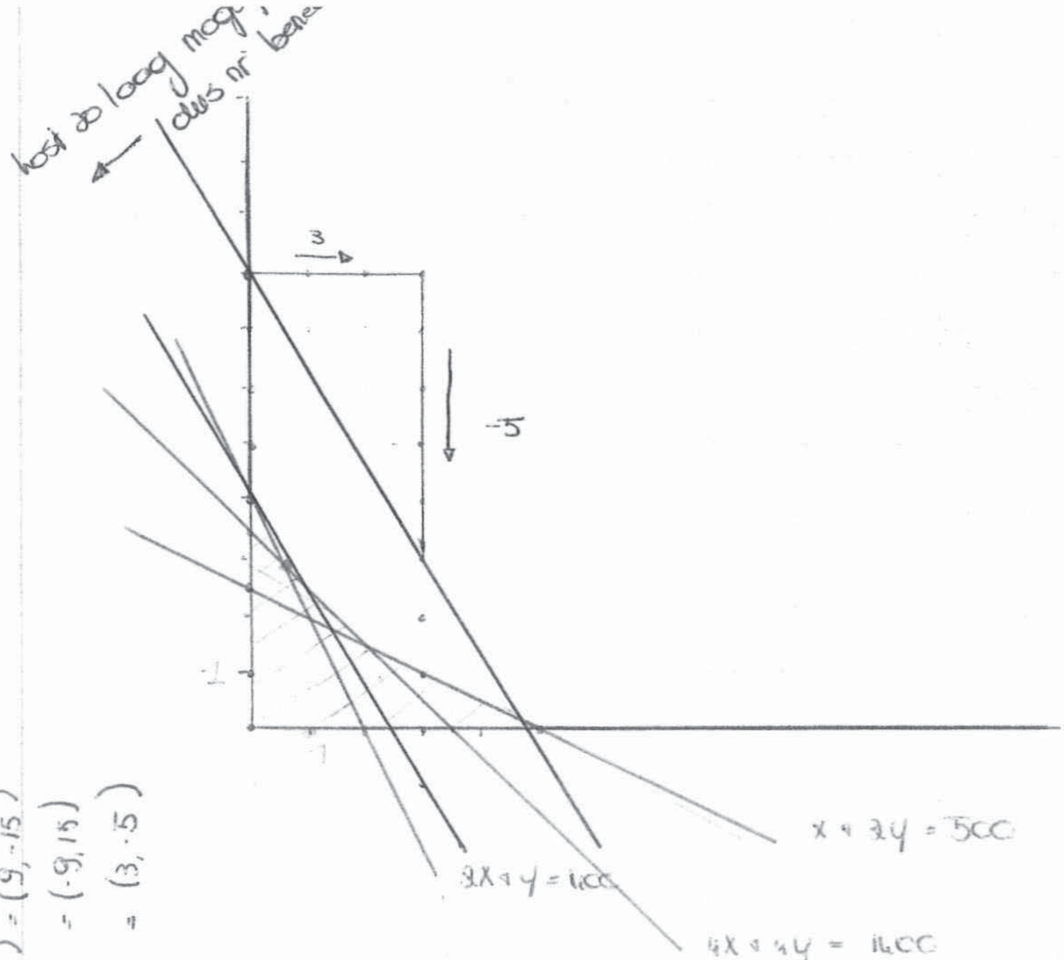
x = eenheid v_1
y = eenheid V_2
$\Rightarrow$ de kost: $15x + 9y$
$\Rightarrow$ ongelijkheidsvoorw
- $2x + y \geq 400$
- $x + 2y \geq 500$
- $4x + 4y \geq 1400$

$\Rightarrow x \geq 0;\ y \geq 0$

Het wisk probleem: Minimaliseer $K(x,y) = 15x + 9y$

randvoorw $\begin{cases} 2x + y \geq 400 \\ x + 2y \geq 500 \\ 4x + 4y \geq 1400 \end{cases}$

pos cond $x \geq 0,\ y \geq 0$



rico $(b,-a) = (9,-15)$
$= (-9,15)$
$= (3,-5)$

$\Rightarrow 15x + 9y = c$

$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 4x + 4y = 1400 \end{cases} \quad \text{of} \quad \cancel{\begin{cases} x + 2y = 500 \\ 4x + 4y = 1400 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 400 - 2x \\ 4x + 4y = 1400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 400 - 2x \\ 4x + 4(400 - 2x) = 1400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 300 \end{cases}$$

Dus de kost is $15.50 + 9.300 = 3450$ cent
$= 34,5$ euro

4 witte sokken	gekleurde sokken	
4	2	15
8	2	20
84	24	

~~x = aantal witte sokken~~

~~y = aantal gekleurde sokken~~

~~$\Rightarrow 4x + 2y = 15$ opbr~~

~~$8x + 2y = 20$ opbr~~

~~MAPR $x \leq 84$~~

~~$y \leq 24$~~

A = pakket 4 x 2

B = pakket 8 x 2

$\Rightarrow$ opbr = $15A + 20B$ met $A \geq 0$ en $B \geq 0$

x = aantal pakketten 4x2

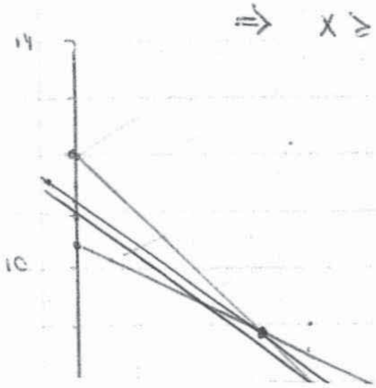
y = aantal paketten 8x2

$\Rightarrow$ De opbr : $15x + 20y$ $\Rightarrow$ rico $(20, -15) = (4, -3)$

$\Rightarrow$ ongelijkheidsvoorw: • $4x + 8y \leq 84$

• $2x + 2y \leq 24$

$\Rightarrow x \geq 0 \; ; \; y \geq 0$



$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ 4x + 8y = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ 4x + 8(12 - x) = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

De opbrengst is dan: $15 \cdot 3 + 20 \cdot 9 = 225$!

* pagina 7.20

1. $x + 2y + z = 6$

$\Leftrightarrow (2 + 4t) + 2(1 - t) + (2 - 2t) = 6$

$\Leftrightarrow 2 + 4t + 2 - 2t + 2 - 2t = 6$

$\Leftrightarrow 6 = 6$

2. $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ = parametervergl.

~~stel $z = \lambda$ dan:~~ $x = 1 - z \Leftrightarrow x + z = 1$ ~~$y - z = 1$~~

$y = 1 + z$

$x + y = 2$

~~$\lambda = 1 - x$~~ $\Leftrightarrow$ ~~$x - z = 1$~~

$y = 1 + 1 - x$

$z = 1 - x$

$\Rightarrow$ stelsel oplossen: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

stel $\begin{cases} z = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ x = 3 + \lambda - 2y = 3 + \lambda - 2(1 + \lambda) = 3 + \lambda - 2 - 2\lambda = 1 - \lambda \end{cases}$

① Dus opl: $V = \{(1 - \lambda, 1 + \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\rightarrow$ is hetzelfde !

$\underline{3}$ a $P(1,2,-4)$; $Q(2,3,7)$; $S(4,-1,3)$

$\Leftrightarrow$ cartesiaanse vergl. ve vlak: $ax + by + cz = d$

Dus $a(x-1) + b(y-2) + c(z+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 11c = 0 \\ 3a - 3b + 7c = 0 \end{cases}$$

- stelsel oplossen:

$$\begin{cases} a + b + 11c = 0 \\ 3a - 3b + 7c = 0 \end{cases}$$

stel $\lambda = c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -11\lambda \\ 3a - 3b = -7\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 11\lambda \\ 3(-b - 11\lambda) - 3b = -7\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{13}{3}\lambda$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{13}{3}\lambda - 11\lambda$$
$$= -\frac{20}{3}\lambda$$

stel $\lambda = -3$

Dan: $a = -\frac{20}{3} \cdot (-3)$
$= 20$

$b = \frac{-13}{3} (-3)$

$= -13$

$c = -3$

- punt invullen: $20x - 13y - 3z = d$?

$\Leftrightarrow 20 \cdot 4 - 13 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = 84$

Dus: $20x - 13y - 3z = 84$

$\Rightarrow$ cartesiaanse vergelijking!

b $P(-7,1,0)$; $Q(2,-1,3)$; $S(4,1,6)$

$\Leftrightarrow$ cartesiaanse vgl: $ax + by + cz = 0$

dus $a(x+7) + b(y-1) + c(z-0) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 2b + 3c = 0 \\ 11a + 6c = 0 \end{cases}$$

- stelsel oplossen:

$$\begin{cases} 9a - 2b + 3c = 0 \\ 11a + 6c = 0 \end{cases}$$

stel $a = \lambda$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = -9\lambda \\ 6c = -11\lambda \end{cases}$$

$\Leftrightarrow c = -\frac{11}{6}\lambda$

$\Leftrightarrow -2b + 3\left(-\frac{11}{6}\lambda\right) = -9\lambda$

$\Leftrightarrow b = \frac{7}{4}\lambda$

stel $\lambda = -12$

$a = -12$

$b = -21$

$c = 22$

- punt invullen: $-12x - 21y + 22z = d$?

$\Leftrightarrow -12 \cdot 4 - 21 \cdot 1 + 22 \cdot 6 = 63$

$-48 - 21 + 132 = 63$

dus: $-12x - 21y + 22z = 63$

4 a $P(2,3,-4)$ en $Q(2,0,-4)$
$\vec{v} = (0,-3,0)$

$$\cancel{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = -4 \end{cases} = \text{parametervergl}}$$

- vectorvergelijking:
  $(x,y,z) = (2,3,-4) + \lambda(0,-3,0)$ voor $\lambda \in \mathbb{R}$
- parametervergl: ↳ in opl staat $(0,1,0)$ MAAR is hetzelfde WANT veelvouden!

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = -4 \end{cases}$$

- cart vergl:

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = -4 \end{cases}$$

b $P(2,1,3)$ en $Q(1,2,-1)$
$\vec{v}\ (-1,1,-4)$

- vectorvergl: $(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(-1,1,-4)$
- paravergl: $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} = \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$
- cart vergl: $\begin{cases} \lambda = 1 - y \\ x = 2 + 1 - y \\ z = 3 + 4(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 4y + z = 7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$ en $P(3,1,-2)$

↳ parametervergl + maken:

$$\begin{cases} \cancel{y} = \lambda \\ 2x - 3\lambda - 1 = 0 \\ 2\lambda + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases}$$

Dus $\vec{u}\ (\frac{3}{2}, 1, -2)$.

$\Leftrightarrow$ vermits de twee rechten evenwijdig moeten zijn is de richtingsvector gelijk,

Dus: $\begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda = y - 1 \\ x = 3 + \frac{3}{2}(y-1) \\ z = -2 - 2(y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \\ z = -2 - 2y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \\ z + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ z + 2y = 0 \end{cases}$$

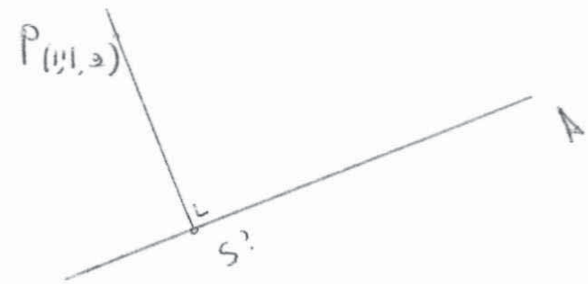
6 a $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ Stel $y = \lambda$ Dan: $\begin{cases} x - 2\lambda + 1 = 0 \\ 2\lambda - z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

b → afstand ve punt tot een rechte

- loodvlak door p op a
- $S = a \cap \alpha$
- $d(p, a) = d(p, S)$

$$A \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \text{richtingsvector} = (2, -2, 1)$$



$$\langle (2,-2,1)(x\,y\,z) \rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - 2y + z = 0$$
$$\Rightarrow (x\,y\,z) = (-3, 1, 8) \quad \rightsquigarrow \; pS = -3x + y + 8z = 14$$

-
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2y - z = 0 \\ -3x + y + 8z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{matrix}$$

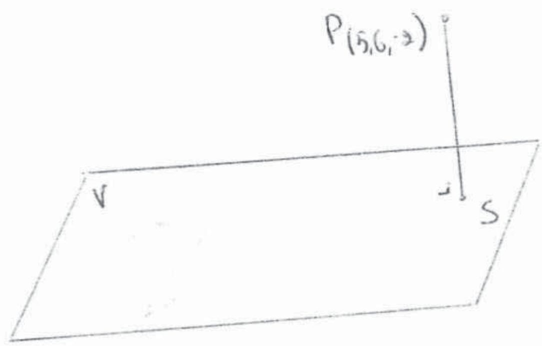
- $\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2} = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1 + 1 - 2\lambda)^2 + (1 - 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2} = 6$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2 - 2\lambda)^2 + (1 - 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2} = 6$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda} = 6$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{9 + 9\lambda^2 - 16\lambda} = 6$$
$$\Leftrightarrow 9\lambda^2 - 16\lambda + 9 = 36 \quad \text{of} \quad 9\lambda^2 - 16\lambda + 9 = -36$$
$$\Leftrightarrow 9\lambda^2 - 16\lambda - 27 = 0 \quad \text{of} \quad 9\lambda^2 - 16\lambda + 45 = 0$$

- $256 - 4 \cdot 9(-27) = 1228$ • $\cancel{256 - 4 \cdot 9 \cdot 45 =} \; -1361$

Goed dan ik fout ?

7 $P(5,6,-2)$
$V: 2x + 3y - z = 6$



richtingsvector v ps is normaalvector v V!

• paravergl V: $2x = 6 - 3\lambda + \mu \iff x = 3 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$

$y = \lambda$

$z = \mu$

$\rightsquigarrow \vec{u}\left(-\frac{3}{2},1,0\right)$ en $\vec{v}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

$\rightsquigarrow$ normaalvector? $\langle (x,y,z)\left(\frac{1}{2},0,1\right)\rangle = 0$

Dus $\frac{1}{2}x + z = 0$

$\iff (x,y,z) = (4, ?, -2)$

$-\frac{3}{2}x + y = 0 \iff (x,y,z) = (2,3,?)$

$(4,6,-2) \rightarrow$ komt overeen met $(2,3,-1)$ uit vergl.

& $2x + 3y = d$?

• ~~vergl ps: $4x + 6y - 2z = d$?~~ ~~$\iff 2x + 3y = 28$~~

$\iff 4x - 2z = -24$

• ~~stelsel~~ oplossen:

$$\begin{cases} 4x - 2z = -24 \\ 2x + 3y = 28 \\ 2x + 3y - z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 22 \end{cases}$$

• $\sqrt{(5-5)^2 + (6-6)^2 + (-2-22)^2}$

$= \sqrt{576} = 24$

- paraverg. ps. $\begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ \ldots \end{cases}$
- stelsel oplossen: $\begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 6 + 3\mu \\ z = -2 - \mu \\ 2x + 3y - z = 6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 2(5+2\mu) + 3(6+3\mu) + 2 + \mu = 6$

$\Leftrightarrow 10 + 4\mu + 18 + 9\mu + 2 + \mu = 6$

$\Leftrightarrow 30 + 14\mu = 6$

$\Leftrightarrow \mu = \dfrac{-12}{7}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{7} \\ y = \dfrac{6}{7} \\ z = \dfrac{-2}{7} \end{cases}$

- Afstand:

$$\sqrt{\left(5 - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(6 - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^2 + \left(\frac{36}{7}\right)^2 + \left(-\frac{12}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{576}{49} + \frac{1296}{49} + \frac{144}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{288}{7}} \approx 6,41$$

* pagina 7.32

1 $(a_1\ b_1\ c_1) = \lambda\ (a_2\ b_2\ c_2)$

$$\Uparrow\ \Downarrow$$

$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ en $b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$

$\rightarrow$ $a_1 = \lambda a_2$ $\quad \lambda = a_1 / a_2$

$b_1 = \lambda b_2$ dus $\lambda = b_1 / b_2$

$c_1 = \lambda c_2$ $\quad \lambda = c_1 / c_2$

$\Rightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ $\quad \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow$ $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ en $b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$

2 $(a, b, c) = \lambda\ (a_1\ b_1\ c_1) + \mu\ (a_2\ b_2\ c_2)$

$$\Uparrow\ \Downarrow$$

$a\ (b_1 c_2 - c_1 b_2) - b\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) + c\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$

$\rightarrow$ $a = \lambda a_1 + a_2 \mu$

$b = \lambda b_1 + \mu b_2$

$c = \lambda c_1 + \mu c_2$

$\Rightarrow$ $(\lambda a_1 + \mu a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2) - (\lambda b_1 + \mu b_2)(a_1 c_2 - c_1 a_2)$
$+ (\lambda c_1 + \mu c_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda a_1 b_1 c_2 - \lambda a_1 b_2 c_1 + \mu a_2 b_1 c_2 - \mu a_2 b_2 c_1$
$- \lambda a_1 b_1 c_2 + \lambda a_2 b_1 c_1 + \mu a_1 b_2 c_2$
$- \mu a_2 b_2 c_1 + \lambda a_1 b_2 c_1 - \lambda a_2 b_1 c_1$
$+ \mu a_1 b_2 c_2 + \mu a_2 b_1 c_2 = 0$!

8 $v_1 = (3,2,-3)$ & $v_2(1,5,0)$

↳ cartesiaanse vergl recht: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (a-3)x + (b-2)y + (c+3)z = d$

⇒ moeilijke Oefening !

* pagina 7.32

1 $(a_1\ b_1\ c_1) = \lambda (a_2\ b_2\ c_2)$

$$\Uparrow \quad \Downarrow$$

$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ en $b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$

$\rightarrow \quad a_1 = \lambda a_2 \qquad\qquad \lambda = a_1 / a_2$

$\quad\ \ b_1 = \lambda b_2 \quad$ dus $\quad \lambda = b_1 / b_2$

$\quad\ \ c_1 = \lambda c_2 \qquad\qquad \lambda = c_1 / c_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0 \text{ en } b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$$

2 $(a, b, c) = \lambda (a_1\ b_1\ c_1) + \mu (a_2\ b_2\ c_2)$

$$\Uparrow \quad \Downarrow$$

$$a(b_1 c_2 - c_1 b_2) - b(a_1 c_2 - c_1 a_2) + c(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

$\rightarrow \quad a = \lambda a_1 + a_2 \mu$

$\quad\ \ b = \lambda b_1 + \mu b_2$

$\quad\ \ c = \lambda c_1 + \mu c_2$

$$\Rightarrow (\lambda a_1 + \mu a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2) - (\lambda b_1 + \mu b_2)(a_1 c_2 - c_1 a_2) + (\lambda c_1 + \mu c_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\lambda a_1 b_1 c_2} - \cancel{\lambda a_1 b_2 c_1} + \cancel{\mu a_2 b_1 c_2} - \cancel{\mu a_2 b_2 c_1} - \cancel{\lambda a_1 b_1 c_2} + \cancel{\lambda a_2 b_1 c_1} + \cancel{\mu a_1 b_2 c_2} - \cancel{\mu a_2 b_2 c_1} + \cancel{\lambda a_1 b_2 c_1} - \cancel{\lambda a_2 b_1 c_1} + \cancel{\mu a_1 b_2 c_2} + \cancel{\mu a_2 b_1 c_2} = 0 \ !$$

$\underline{8}$ $v_1 = (3,2,-3)$ & $v_2(1,5,0)$

↳ cartesiaanse vergl recht: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (a-3)x + (b-2)y + (c+3)z = d$

⇒ moeilijke Oefening !

Oefeningen module 7

1) a)

$\cancel{(1 \cdot (-2) (-}$

$2 - (-12) + 12 - 15 + 60 + 8 = 79$

b) $\cancel{2 \cdot (2-8) + -2(-4-6) + 3(20-4)}$

$\cancel{-6 + 20 + 48 = 62}$

$1(2-15) - 2(-4-6) + 3(20+4)$

$-13 + 20 + 72 = 79$

c) $79 * (2) = 158$

R_2 is verdubbeld

$158 * (-1) = -158$

$\hookrightarrow R_1 \Leftrightarrow R_2$

2) de opp v/d parallellogram:

$d\left(a - \frac{bc}{d}\right) = ad - bc$

$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ maar rij 1 = rij 2

$\det\begin{pmatrix} AC & C \\ A & C \end{pmatrix}$

$AC - AC = 0$ ✓

3) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $2 - 4a + 12a - 18 + 36 - 12$

$8a + 8 = 0$

$a = -1$

b) $\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ $(a+2)^3 - (a+2) + 1 - (a+2) + 1 - (a+2)$

$(a+2)^3 - 3(a+2) + 2$

$(a^2 + 4a + 4)(a+2) - 3a - 4$

$a^3 + 2a^2 + 4a^2 + 8a + 4a + 8 - 3a - 4$

$a^3 + 6a^2 + 9a + 4$

$(a+1) \ldots$

	1	6	9	4
-1	6	-1	-5	-4
	1	5	4	0

$(a+1)(a^2 + 5a + 4)$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$a_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$

$a_2 = \frac{-5-3}{2} = -4$

$(a+1)(a+1)(a+4)$

ρε.: $a = -1$

$a = -4$

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[K_3 = K_3 - K_1]{K_2 = K_2 - K_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = 1 \cdot \left((b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a) \right)$

$(b-a)(c-a)\left((c+\cancel{a}) - (b+\cancel{a}) \right)$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

$-6 - (-4) \quad -2$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$(3-\lambda)(-2-\lambda)+4$

$-6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2+4$

$-2-\lambda+\lambda^2$

$D = 1+8 = 9$

$\frac{1+3}{2} = 2 \qquad \frac{1-3}{2} = -1$

$\lambda = 2 \rightarrow$ eigenwaarde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad x = -y \qquad (a, -a)$$

bv $(1, -1)$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$4x + y = 0$
$-4x - y = 0$

$4x = -y \qquad (4a, -a)$

bv $(4, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$-1 + 4 = 3 \qquad \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$(4-\lambda)(1-\lambda)(8-\lambda) - (2(1-\lambda).6) +$
$(-1 . 6 . 2) + -(-1 . 6 . (4-\lambda)) + (6 . 2 . -1)$
$-((8-\lambda)(2 . -1)$

$(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2)(8-\lambda) - (12 - 12\lambda) +$
$(-12) - (-24 + 6\lambda) + (-12) - (-16 + 2\lambda)$

$(32 \; \overset{-40\lambda}{\cancel{-32\lambda}} + 8\lambda^2 \; \cancel{4 - 4\lambda} - 5\lambda^2 - \lambda^3)$
$\cancel{-12 + 12\lambda - 12 + 24 - 6\lambda - 12 + 16} - 2\lambda$
$4\lambda + 4$

$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 40\lambda + 36$
$-8 + 12 - 80 + 36$
$\cancel{8 + 12 \quad 80}$

$32 - 4\lambda - 32\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 + 8\lambda^2 - 8\lambda - \lambda^3$
$32 - 44\lambda + \cancel{8}\, 13\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4$
$\cancel{32} \quad 36 - 40\lambda + 13\lambda^2 - \lambda^3$
$36 \quad -80 \quad 52 \quad -8$
$88 - 88 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 13 & -40 & 36 \\ 2 & & -2 & 22 & -36 \\ \hline & -1 & 11 & -18 & 0 \end{array}$$

$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 11\lambda - 18)$

$D = 121 - 72 = 49$

$\frac{-11+7}{-2} = 2 \qquad \frac{-11-7}{-2} = 9$

b $$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_6 \to R_6 + R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

* Pagina 5.28

1 $Q_{v,1} = 10 - 2p_1 + p_2$

$Q_{v,2} = 5 + 2p_1 - 2p_2$

$Q_{o,1} = -3 + 2p_1$

$Q_{o,2} = -2 + 3p_2$

a concurrerende goederen → $b_{i,j} > 0$

Dus bij 1ste vgl: Als prijs v goed 1 (p_1) stijgt, dan daalt de vraag ($Q_{v,1}$) nr goed 1

Als de prijs v goed 2 stijgt, dan stijgt de vraag mee!

b $Q_{v,1} = Q_{o,1}$

$\Leftrightarrow 10 - 2p_1 + p_2 = -3 + 2p_1$

$\Leftrightarrow 13 - 4p_1 + p_2 = 0$

$Q_{v,2} = Q_{o,2}$

$\Leftrightarrow 5 + 2p_1 - 2p_2 = -2 + 3p_2$

$\Leftrightarrow 7 + 2p_1 - 5p_2 = 0$

$\Rightarrow 13 - 4p_1 + p_2 = 7 + 2p_1 - 5p_2$

$\Leftrightarrow 6 - 6p_1 + 6p_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & -13 \\ -6 & 6 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$p_2 = 3$ & $p_1 = 4$

$\Rightarrow Q_{v,1} = Q_{o,1} = 5$

$Q_{v,2} = Q_{o,2} = 7$

2 a $Q_v = Q_a$

$\Leftrightarrow 25 - \frac{1}{2}p = -50 + 2p$

$\Leftrightarrow 75 = \frac{5}{2}p$

$\Leftrightarrow p = 30$

Dus $Q_v = Q_a = 10$

b $Q_v = 25 - \frac{1}{2}p^c \Leftrightarrow Q_v = 25 - \frac{1}{2}(p^p + 5)$

$Q_a = -50 + 2p^p \qquad \Leftrightarrow Q_v = 25 - \frac{1}{2}p^p - \frac{5}{2}$

$= \frac{45}{2} - \frac{1}{2}p^p$

$\Rightarrow -50 + 2p^p = \frac{45}{2} - \frac{1}{2}p^p$

$\Leftrightarrow \frac{145}{2} = \frac{5}{2}p^p$

$\Leftrightarrow p^p = 29$

Dus $p = p^c = 34$ ($\uparrow$ met 4 eenh)

$\Rightarrow Q_v = 8$ ($\downarrow$ met 2 eenh)

$\Rightarrow$ hoeveel prod & cons draagt (zie eco)