Voorbereidingsopdrachten Les 2

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag 02/10 om 16:00. Geef al die posten als titel "Les 2 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes, bijvoorbeeld iets als "Les 2 - Bewijs Propositie 2.2.2.3" of "Les 2 - Opdracht 4(b)".**
- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

---

1. Ontken volgende uitspraak.

   Elke prof doceert minstens één vak waarop alle studenten slagen.

   Post jullie voorstellen (en/of reacties op andermans voorstellen) op het forum.

2. In de eerste les koppelden even terug op opdracht 4 van vorige voorbereidingstaak die als volgt luidde:

Zij : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stijgende functie. Wat kan je besluiten over het aantal oplossingen voor $x \in \mathbb{R}$ van de vergelijking $f(x) + x^3 = 0$?

   Door combinatie van suggesties uit de groep kwamen we tot het sterke vermoeden: deze vergelijking heeft hoogstens één oplossing. Probeer nu dit vermoeden hard te maken met een waterdicht argument. Werk dat argument in detail uit. Respecteer hierbij de regels van het nauwkeurige taalgebruik (doe dus zeker de "voorleestest").
   Je wordt sterk aangemoedigd om je voorstel van argumentatie op het forum op Toledo te posten en hou je zeker niet in om daar met elkaar van gedachte te wisselen over de diverse voorstellen. Breng in elk geval je voorstel mee naar de les.

3. Neem grondig p.11 tot p.17 (tot voor de opdrachten) door en vergewis je ervan dat daar geen duistere punten meer in zitten. Indien wel, signaleer ze op het forum.

4. **Van vermoeden tot zekerheid?**

   (a) Vertrek van volgende observaties:

   $$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

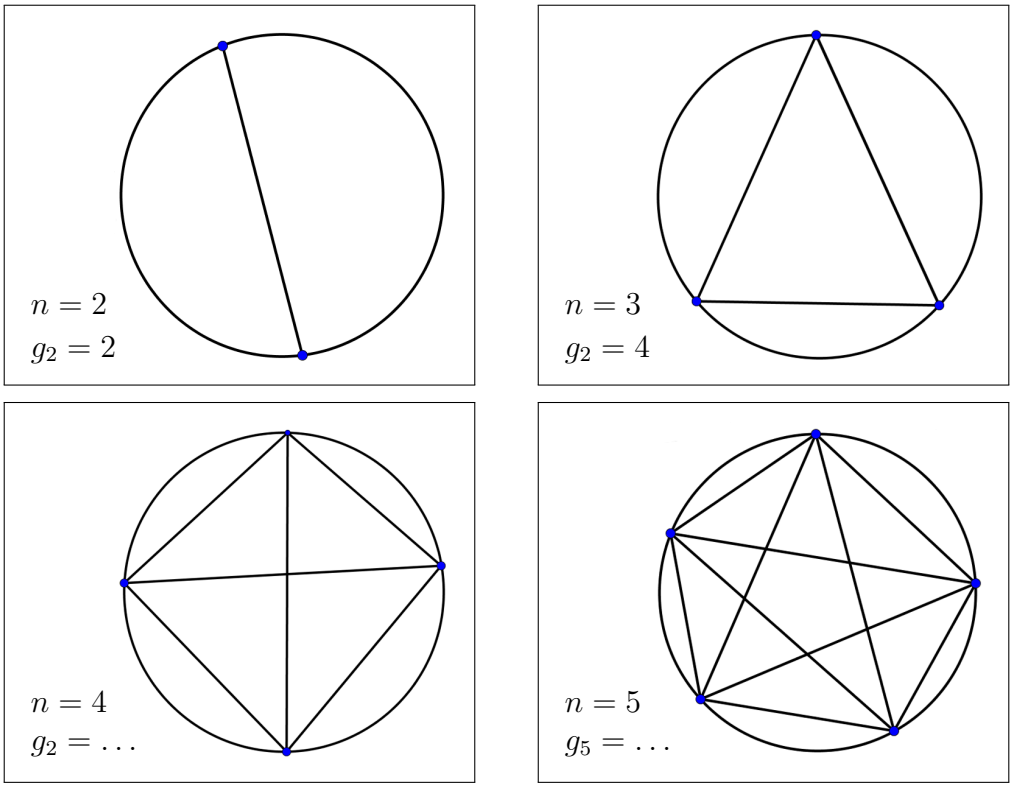
   $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

   $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

   $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{30+10+5+3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

   Wat vermoed je op basis van deze observaties?
   Klopt je vermoeden? Argumenteer!

(b) Kies $n \geq 2$ punten op een cirkel. Verbind elk paar punten met een lijnstuk. Veronderstel dat de n punten zo gelegen zijn dat er geen drie lijnstukken elkaar in eenzelfde punt binnen de cirkel snijden. De lijnstukken verdelen de cirkel in g_n gebieden.
We observeren, door te tellen, de waarde van g_n voor n gelijk aan 2, 3, 4 en 5.



Wat vermoed je over de waarde van g_n voor een willekeurige $n \geq 2$ op basis van deze observaties? Klopt je vermoeden? Argumenteer!

(c) In de eerste les presenteerden we ook het probleem van het overdekken van een bord met dominosteentjes. De relevante slides zijn hierbij als aparte pdf opgeladen. In een oogopslag is het duidelijk dat je een (8×8)-bord kan overdekken met 32 dominosteentjes. We knippen nu 2 diagonaal tegenover elkaar gelegen vierkantjes uit het (8×8)-bord weg. We houden dan nog een bord met 62 vierkantjes over. Is het mogelijk dat bord te overdekken met 31 dominosteenjes? Argumenteer!
Ideeën en discussies hierover op het forum zijn uiteraard welkom.

5. Bestudeer grondig secties 2.1 en 2.2 (p.19 - p.31). Dit stuk bevat grotendeels zaken die jullie in het middelbaar gezien hebben. We gaan dus zeker niet in de les alles de revue laten passeren maar hier en daar inzoomen op bepaalde zaken. Op wat zal ingegaan worden hangt volledig van jullie af. Als je problemen hebt met bepaalde stukken, signaleer dit dan op het discussieforum. Indien er geen significant aantal vragen op het forum verschijnen, gaan we er van uit dat deze leerstof gekend is en zal dat onderdeel van de les snel voorbij zijn[1] ...

6. Maak na je grondige studie van p.19 - p.31 volgende oefeningen en stel hiermee meteen zelf vast of je de studie grondig genoeg hebt gedaan. Signaleer via het forum of dat al

[1] Vragen die door weinig mensen aangekaart worden, zullen dan *en petit comité* op het einde van de les beantwoord worden.

dan niet lukt. Post voorstellen/suggesties voor oplossingen van elk van die oefeningen op het forum. Uiteraard zijn reacties op die voorstellen/suggesties ook meer dan welkom op het discussieforum.

(a) Noteer met A de verzameling van alle breuken die strik groter zijn dan 1 en kleiner of gelijk aan 4. Heeft A een grootste element (een maximum)? Heeft A een kleinste element (een minimum)? Argumenteer telkens nauwkeurig! Noteer nu met O de verzameling van alle ondergrenzen van A. Heeft O een grootste element?

(b) Werk het bewijs van de driehoeksongelijkheid in $\mathbb{R}$ (Propositie 2.2.2.3) volledig uit[2]. Doe de voorleestest op je argumentatie.

(c) Geef het bewijs van Propositie 2.2.2.4[3]. Doe de voorleestest op je argumentatie.

(d) Bereken

$$\sum_{k=2}^{2016} \frac{1}{k^2-1}.$$

Het resultaat moet je kunnen schrijven als één breuk $\frac{a}{b}$ waarbij je a en b natuurlijke getallen zijn die je expliciet moet bepalen (bv. iets van de vorm $\frac{217}{666}$).
Hint: voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 2$ is

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}.$$

(e) Is de verzameling $[1, +\infty[$ een gesloten deel van $\mathbb{R}$? Argumenteer!

[2]Indien je dat al niet spontaan geprobeerd hebt tijdens je "grondige studie", heb je eigenlijk nog niet goed begrepen wat "grondig" betekent.

[3]Indien je dat evenmin al spontaan geprobeerd hebt tijdens je "grondige studie", zelfde opmerking als in de voetnoot hierboven ...

Voorbereidingsopdrachten Les 3

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag 04/10 om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 3 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Vergeet zeker niet de aanduiding van het lesnummer in de titel van je post op te nemen! Geef geen 'lege' antwoorden (d.w.z. antwoorden zonder één woord) op eerdere posten van medestudenten.
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidswerk mee naar de les!**

---

1. Bestudeer grondig het stuk over de ruimte $\mathbb{R}^n$ in de cursus (p.34 - p.46). Wissel op het forum van gedachte over de stukken die je eventueel duister vindt.
   Maak, bij wijze van test of je een en ander begrepen hebt, volgende oefeningen.

   (a) Veronderstel dat je op $\mathbb{R}^n$ (met $n \geq 2$), naast de gewone optelling, volgende vermenigvuldiging zou definiëren:

   $$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

   Wordt $\mathbb{R}^n$ dan een veld voor deze bewerkingen? Leg uit!

   (b) Geef het bewijs van Propositie 2.3.2.5. Oefen je hierbij in keurig formuleren. Doe de voorleestest.

   (c) Bij het bestuderen van het bewijs van de driehoeksongelijkheid heb je onderaan p.39 gelezen: "Als bovenstaande kwadratische uitdrukking ..., moet de discriminant negatief (of nul) zijn". Leg die bewering in volle detail uit.

2. Bestudeer grondig het stuk over de complexe getallen in de cursus (p.47 - p.55). Wissel op het forum van gedachte over de stukken die je eventueel duister vindt.
   Doe dan volgende testjes om te zien of je een aantal basisconcepten in verband met complexe getallen begrepen hebt.

   (a) Teken het complexe vlak (dus een assenkruis waarop je 1 en i aanduidt). Kies dan een willekeurig compex getal z in dit vlak. Doe dit bijvoorbeeld door lukraak je pen op je blad te laten vallen met de schrijfpunt naar beneden; neem dan voor z het punt dat je pen heeft gemarkeerd op het blad. Teken dan (zonder te rekenen maar puur afgaand op de meetkundige betekenis van de betrokken operaties op complexe getallen) waar $z + 1$, $z - i$, iz, $z/|z|$, z^2, $1/z$ en $(1 - i)z$ ligt.

   (b) Teken volgende verzameling in het complexe vlak:

   $$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 - 3i| > 5\}.$$

Voorbereidingsopdrachten Les 4

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 18:00. Geef al die posten als titel "Les 4 - . . . " met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidswerk mee naar de les!**

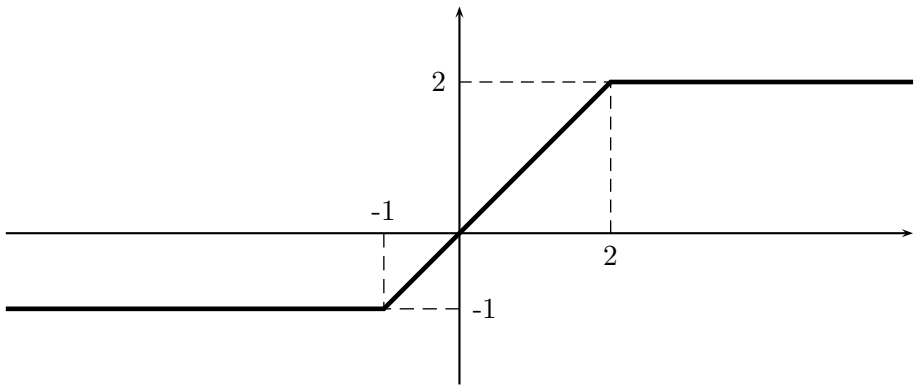
Bestudeer grondig p.58 - p.91 uit de cursus. Denk na over de vraagjes die hier en daar in de tekst verweven zitten. Signaleer op het forum zo nauwkeurig mogelijk de punten waar je graag extra uitleg over wil. Hou je uiteraard niet in om reacties/suggesties/antwoorden op vragen van anderen te posten.
Om zelf te testen of je de elementaire aspecten van het functiebegrip voldoende beheerst, wat het geval zou moeten zijn na de grondige studie van hierboven, maak je onderstaande oefeningen[1]. Uiteraard zijn er op het discussieforum ook posten over die oefeningen welkom.

1. Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie is die voldoet aan

$$f(x+y, 2x-y+1) = 2x+5y+2 \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

   Vind het functievoorschrift van f.

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met grafiek



   Kies nu zelf lukraak een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door "zomaar" een grafiek te tekenen.
   Schets nu de grafiek van $f \circ g$.
   Herhaal dit enkele keren voor andere lukraak gekozen functies g.
   Kan je nu in het algemeen beschrijven hoe je "meteen" uit de grafiek g die van $f \circ g$ vindt? Als je inzicht het niveau bereikt heeft dat het zou moeten bereiken, moet je in staat zijn om quasi-ogenblikkelijk (d.w.z. binnen een paar seconden) de grafiek van $f \circ g$ te tekenen als je een lukrake functie g via haar grafiek voorgeschoteld krijgt. Lukt het?

[1] Als je wat inzicht hebt, en dat is precies wat deze oefeningen willen testen, zou elk van die oefeningen (waarbij we oefening 4 met zijn deelvragen (a) $\to$ (d) als één oefening beschouwen) je niet veel meer dan een 5-tal minuten tijd mogen vergen.

3. Beschouw een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Hoe kan je aan de grafiek van f vaststellen of f injectief is?
   En hoe zie aan de grafiek dat f surjectief is?

4. (a) Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x - 2$ injectief?
   Zo ja, geef het functievoorschrift van f^{-1}.

   (b) Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ injectief?
   Zo ja, geef het functievoorschrift van f^{-1}.

   (c) Is $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ injectief?
   Zo ja, geef het functievoorschrift van f^{-1}.

   (d) Is $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$ injectief?
   Zo ja, geef het functievoorschrift van f^{-1}.

5. Schets de niveaulijnen van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

6. Veronderstel dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een willekeurige functie is. Beschouw dan de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met als voorschrift $f(x, y) = g(x + y)$.

   (a) Veronderstel dat je een lukrake functie g opgegeven krijgt via een grafiek. Construeer aan de hand van de grafiek van g de grafiek van f. Hierbij mag je "construeren" vrij letterlijk opvatten: je kan een model voor de grafiek van f vouwen met een blad papier.

   (b) Hoe zullen de niveaulijnen van f eruitzien?

7. Bestaan er meetkundige rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die voldoen aan

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}?$$

   Argumenteer!

Voorbereidingsopdrachten Les 5

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 19:30. Geef al die posten als titel "Les 5 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.
- **Breng het resultaat van je voorbereidswerk mee naar de les!**

Bestudeer grondig het stuk over lineaire en eerstegraadsfuncties in de cursus (§1 van hoofdstuk II). Besteed voldoende aandacht aan de impliciete oefeningetjes die her en der in de tekst verweven zitten. Ga na wat je voor jezelf de moeilijke punten vindt. Probeer hierbij zo goed mogelijk te detecteren waar je probleem precies zit. Post dan de zaken waar je extra uitleg bij wil in de les op het forum.
Maak vervolgens onderstaande opdrachten[1]. Ook posten over die opdrachten (vragen, suggesties en antwoorden) zijn uiteraard ook welkom op het forum. Breng je resultaten mee naar de les.

1. Van Propositie 1.1.2 is slechts het bewijs van één implicatie uitgewerkt in de cursus. Werk nu zelf het bewijs van de andere implicatie zeer nauwgezet uit. Doe de "voorleestest" op je voorstel tot oplossing.

2. Vergewis je ervan dat je alle verificaties die gevraagd worden in de cursus in 1.2.3, Voorbeelden en tegenvoorbeelden, kan uitvoeren. Kies er vier verificaties uit die je nauwgezet en in volle detail uitwerkt dus met grote aandacht voor de kwaliteit van de formulering (alsof het examenvraag zou zijn ...). Laat je indien nodig leiden door de voorbeeld-verificaties die al in de cursus zijn uitgewerkt.

3. (a) Ga na dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ voldoet aan volgende eigenschap:
$$f(\lambda x) = \lambda\, f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ en } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$
   (b) Kan je nog meer functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vinden die aan eigenschap $(*)$ hierboven voldoen?
   (c) Kan je <u>**alle**</u> functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vinden die aan eigenschap $(*)$ hierboven voldoen? Wellicht heb je hiervoor een vermoeden. Kan je dat vermoeden ook waterdicht bewijzen?

4. Zie je het verband tussen de oefening hierboven en bepaalde resultaten uit de cursus met betrekking tot lineaire en eerstegraadsfuncties? Leg uit!

5. (a) Bestaat er een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ waarvoor
$$f(1,0,1,0) = f(0,1,0,1) = f(1,1,1,1) = (1,1)?$$
   Argumenteer!

[1] Als je begrepen hebt wat "grondig bestuderen" betekent, zal je al spontaan de eerste twee opdrachten gemaakt hebben tijdens het "grondig bestuderen".

(b) Bestaat er een eerstegraadsfunctie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ waarvoor

$$f(1,0,1,0) = 2f(0,1,0,1) = f(1,1,1,1) = (0,2)?$$

Argumenteer!

Voorbereidingsopdrachten Les 6

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 6 - . . . " met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidswerk mee naar de les!**

Onderwerp: limieten van rijen in $\mathbb{R}$ (II.2.1, II.2.2 en II.2.3)

Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde. Je zal merken dat er hier en daar een bewijsje uit de cursustekst weggesnoeid is als leerstof. Interpreteer dat niet als een signaal dat het hele onderdeel over limieten minder belangrijk zou zijn. Integendeel, door hier en daar iets weg te snoeien willen we er voor zorgen dat je voldoende tijd en energie hebt om alles wat overblijft extra goed te beheersen. Besteed reeds bij de allereerste verkenning en studie van dit stuk leerstof **meteen** ruim aandacht aan de kleine oefeningetjes of vragen die her en der in de tekst verweven zitten. Ze helpen je om gaandeweg tot elementaire inzichten te komen, inzichten zonder dewelke het "zomaar" verder lezen in de tekst over limieten van rijen een steeds hachelijkere onderneming wordt

1. Neem eerst, bij wijze van opwarming voor het begrip "limiet", II.2.1.1 uit de cursus door. Doseer je tijd. Dit zou niet veel meer dan een klein kwartiertje in beslag mogen nemen. Want dit stukje is een compleet "vlakke rit". De steilere stukken zijn voor zo meteen.

2. Bestudeer grondig II.2.1.2 en II.2.1.3. Zeer essentieel hierbij is de doe-het-zelf opdracht II.2.1.4.

3. Bestudeer de eigenschappen uit II.2.2.1 en II.2.2.2. Hierbij snoeien we de bewijsjes van II.2.2.1.4, II.2.2.2.4 en II.2.2.2.6 (bewijsjes uitgewerkt in de cursus of opgegeven als oefeningetje) weg als leerstof. De overige zaken uit II.2.2.1 en II.2.2.2 moet je goed beheersen. De kleine opdrachtjes tussendoor zijn hierbij belangrijk (ook al staan ze soms in de kleine lettertjes van een voetnoot).

4. Limieten van rijen heb je natuurlijk ook al in het middelbaar onderwijs bestudeerd. Maak nu eerst "onbevangen" (d.w.z. zonder eerst verder te lezen in de cursusnota's maar gewoon op basis van wat je destijds al leerde over limieten) volgende bezinningsopdracht.

   Hieronder staan een aantal limietberekeningen. Ben je het eens met het resultaat van de berekening? Ben je het eens met de berekeningswijze, de redenering? Leg uit waarom wel of waarom niet. Wissel van gedachte met elkaar op het forum.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n} - \dfrac{3n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} - 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 0 - 3\times 1 = -3.$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + (-1)^n)$ bestaat niet want
   $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + (-1)^n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 + \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ en $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ bestaat niet.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \times \lim\limits_{n\to\infty} \sin n \;=\; 0 \times \lim\limits_{n\to\infty} \sin n \;=\; 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ is onbepaald.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3^n n}{2n+1}\right) \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} 3^n \;\times\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} \;=\; +\infty \;\times\; \dfrac{1}{2} \;=\; +\infty.$

5. Bestudeer, na de "onbevangen" oefening hierboven, vervolgens zeer grondig II.2.2.3. De bewijsjes van II.2.2.3.3 en II.2.2.3.4 (allebei neergeschreven voor de formulering van hun respectieve propositie) snoeien we weg als leerstof. Als je II.2.2.3 op minimale wijze beheerst, zouden volgende oefeningen vlotjes moeten lukken.

   (a) Bewijs uitspraak (3) van Stelling II.2.2.3.1. Hierbij mag je het bewijs van uitspraak (2), zoals uitgeschreven in de cursusnota's, als leidraad gebruiken.

   (b) Een ijverige studente heeft geprobeerd het bewijs (onderaan p.153 en bovenaan p.154) van het vermoeden dat uiteindelijk bevestigd wordt en geconsolideerd wordt in Propositie II.2.2.3.2, zelf op te stellen zonder eerst in de cursus te "spieken". Het blijkt dat zij op dezelfde manier te werk is gegaan als in de cursustekst, **behalve** dat zij in plaats van "Neem nu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$" (begin p.154) heeft geschreven "Neem nu $n_0 = n_1 + n_2$". De rest is identiek zoals in de cursustekst. Is haar bewijs correct? Leg uit!

   (c) Wat betekent het **precies** in de context van limieten van rijen in $\mathbb{R}$ wanneer men zegt dat $\frac{-\infty}{+\infty}$ een onbepaalde vorm is. Onderbouw je uitleg met de nodige voorbeelden.

6. Bestudeer II.2.3. Het bewijs van II.2.3.1.2 snoeien we weg als leerstof. Analyseer in detail de voorbeelden van de limietberekeningen. Essentieel is dat je zelf is staat bent om bij diverse opgaven van limietberekeningen (1) te onderkennen welke eigenschappen/rekenregels relevant zijn en (2) die resultaten op een correcte wijze toe te passen. Dit laatste betekent onder meer dat je eerst de voorwaarden onder dewelke die resultaten gelden, expliciet moet nagaan.
   Herbekijk nu de bezinningsoefening uit 4. Zijn de inzichten die je toen had, veranderd/bevestigd? Leg de (eventuele) juiste berekeningen uit 4 nu in volle detail uit waarbij je elke stap verantwoordt door toepassing (na verificatie van de voorwaarden) van een gepast resultaat. Corrigeer de (eventuele) foute berekeningen uit 4.

Voorbereidingsopdrachten Les 7

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 7 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Limieten van rijen in $\mathbb{R}^n$ (II.2.4)
Belangrijke functies (exp & log, sin & cos) (II.3)

Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Bestudeer II.2.4 (limieten van rijen in $\mathbb{R}^n$). Zeer belangrijk voor een goed concept is dat je de tekenopdracht boven Definitie II.2.4.2 maakt. Bovendien moet je Definitie II.2.4.2 op diezelfde tekening visueel kunnen illustreren in het geval van de voorbeeldrij gegeven door (2.5). Zonder tegenbericht gaan we ervan uit dat je de "dubbele ongelijkheid" (2.6) die een centrale rol speelt in het bewijs van II.2.4.4, zelf kan bewijzen. Lukt dat niet meteen voor willekeurige n, probeer dan misschien eerst eens voor $n = 2$ (en vergeet dan zeker geen tekening te maken die meteen duidelijk maakt hoe "evident" die dubbele ongelijkheid wel is).

   Test je inzicht met volgende oefening:

   (a) Veronderstel dat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente rijen in $\mathbb{R}^n$ zijn. Mag je besluiten dat $(\langle x_k, y_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ een convergente rij is in $\mathbb{R}$. Argumenteer[1]!

2. Het stuk over exponentiële en logaritmische functies (II.3.1) zal (zou) welbekend (moeten) zijn vanuit je middelbare schooltijd. Pluis dat stuk in de cursus uit om te zien of er geen duistere punten voor jou meer inzitten (indien wel, forum ...). Dit betekent onder meer dat we, zonder expliciet tegenbericht op het forum, ervan uitgaan dat **alle** impliciete oefeningen en opdrachtjes die in de tekst verweven zitten, voor jou geen probleem vormen. We gaan er eveneens van uit dat je vlot overweg kunt met de klassieke rekenregels voor de exponentiële en logaritmische functies. Je zou bijvoorbeeld **inzichtelijk** (d.w.z. zonder ergens een of andere "toverformule" te moeten opdiepen waarin je dan domweg getalletjes invult) binnen de halve minuut met behulp van je rekenmachine moeten kunnen berekenen hoeveel $\log_2(7)$ is[2].

3. Deel II.3.2 over goniometrische en cyclometrische functies bevat grotendeels ook zeer vertrouwd materiaal (ga na of dit ook voor jou effectief het geval is). Voor de meesten

[1] D.w.z. als je "nee" antwoordt, moet je dat onderbouwen door een concreet voorbeeld te geven waarbij je nauwkeurig uitlegt waarom je voorbeeld voldoet aan wat je erover beweert; als je "ja" antwoordt, moet je een bewijs geven (waarbij je beroep mag doen op alle resultaten en eigenschappen over limieten die we gezien hebben).

[2] Met $\log_2$ bedoelen we de logaritmische functie met grondtal 2, soms ook wel genoteerd als ${}^2\log$.

zal wel nieuw zijn dat de exponentiële functie (met grondtal e) hier haar rentree maakt, dit keer als functie gedefinieerd op $\mathbb{C}$. Maak je ook hiermee vertrouwd. Ga na of je kan narekenen dat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ voor alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ en maak volgende kleine zelftestoefening.

(a) Uit Propositie II.3.3.1.3 weten we dat $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ injectief is. Blijft injectiviteit[3] behouden voor de uitbreiding van exp tot een functie van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$? Argumenteer!

[3]Bijvraagje: waarom was injectiviteit van de functie $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ een belangrijke eigenschap?

Voorbereidingsopdrachten Les 8

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 18:00. Geef al die posten als titel "Les 8 - . . . " met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp: Continuïteit (II.4.1 en II.4.2)

Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Bezin je grondig, **voor je in de cursus begint te lezen**, over onderstaande 'teasers'[1] Die teasers zijn bedoeld om je hersenen te prikkelen en je zo op te warmen voor het concept continuïteit. Voor een deel (toch ongeveer de helft) van de teasers zou je ook nu al, dus 'onbevangen', een antwoord moeten kunnen vinden. **Lukt dat effectief? Voor welke? Wissel ervaringen en ideeën uit via het forum.** Voor een ander deel zou het straks moeten lukken, na het bestuderen van het stukje leerstof voor deze les. **Gebruik voor elke teaser (ook voor elk van de sub-teasers van (iv)) waarover je iets kwijt wil, een aparte discussielijn!**

   (i) Bestaat er een $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $e^{3x} - x^3 + 2x^2 + 5\sin x = 7$?

   (ii) Bestaat er voor elke $c \in \mathbb{R}$ een $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor

   $$x^5 + y^5 + xy - 2\sin(x^2 + y^2) - 5x + 3y = c?$$

   (iii) Heeft volgend stelsel voor $x, y \in \mathbb{R}$ oplossingen?

   $$\begin{cases} e^x + x + e^{\sin y} + 3y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   (iv) Hieronder beschouwen we een aantal functies $f : A \to \mathbb{R}$ waarbij A telkens een of ander deel van $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^4$ is. Voor elke van onderstaande functies stellen we ons de vraag of f een minimale en een maximale functiewaarde bereikt op A, m.a.w. we vragen ons af of er een $a \in A$ bestaat zo dat $f(a) \leq f(t)$ voor alle $t \in A$ en of er een $b \in A$ bestaat zo dat $f(b) \geq f(t)$ voor alle $t \in A$.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

   (b) $f : [-3, 5] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

   (c) $f : [-3, 5[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

   (d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x - x^2$.

[1] Enkele ervan werden al getoond tijdens de preview.

(e) $f : [0,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x < 1, \\ 1-x & \text{als } x \geq 1. \end{cases}$

(f) $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

(g) $f : [-1,1] \times]-1,1[\to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

(h) $f : [0,2] \times [0,2] \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^3 y + 2\sin(xy)$.

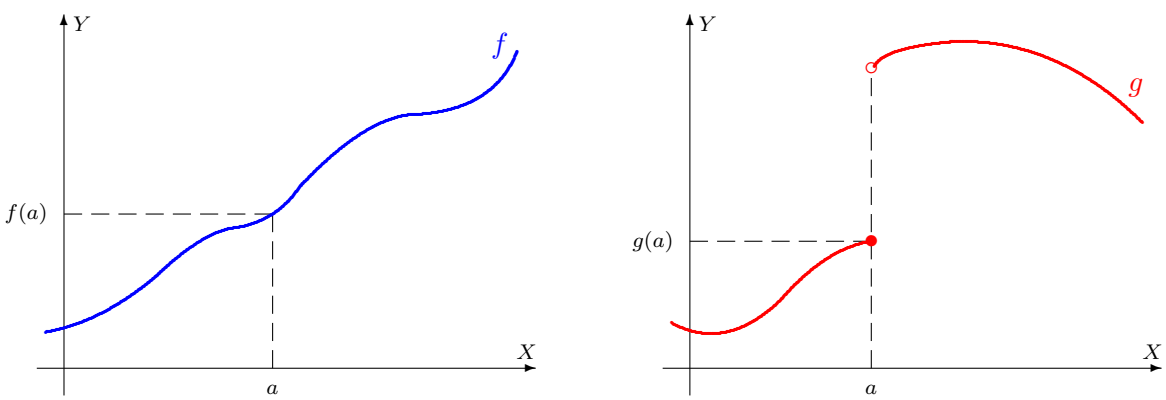
(j) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \dfrac{1 + 2\sin(xy)}{1 + x^2 + y^2}$

(k) $f : A \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x,y,u,v) \mapsto \dfrac{x\,e^u - 3uv\sin(x+y)}{e^{u-x} + e^{v+2y}}$,

waarbij $A = \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \leq 5\}$.

2. **Van intuïtie naar precieze definitie.**
Open je cursus nog niet*, maar maak nu meteen onderstaande teken-kijk-en-formuleer-oefening. De bedoeling is dat je zelf tot een nauwkeurige definitie van continuïteit komt. Dit is een uitermate belangrijke oefening voor je leerproces. De beste manier om je een concept letterlijk en figuurlijk echt 'eigen' te maken is immers dat je het concept zelf uitbroedt. Trek hier dus de nodige tijd voor uit.*

Beschouw twee functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvan de grafieken er als volgt uitzien.



De intuïtie die iedereen heeft over "continuïteit", laat ons aanvoelen dat f "continu" is in a en dat g "niet continu" is in a. Hoe kunnen we dit onderscheid in gedrag van f en g in a precies maken?

Teken bovenstaande grafieken wat groter en teken op de X-as een rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die naar a convergeert. Teken dan op de Y-as de rij van de beelden van die rij onder f en onder g, dus de rijen $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ en $(g(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Wat stel je vast? Probeer dit voor een aantal verschillende rijen die naar a convergeren.

Probeer nu na deze teken-en-kijk-experimenten zelf een nauwkeurige definitie te geven voor de continuïteit van een functie f in een bepaald punt a.

Definitie

Beschouw een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een $a \in \mathbb{R}$. We noemen f **continu** in a als ... *(aanvullen)*

3. Open **nu pas** je cursus en confronteer wat je hierboven zelf als definitie voor continuïteit hebt voorgesteld, met wat je op p.199 zal vinden. Had jij dezelfde definitie gevonden als die in 4.1.2?

4. Bestudeer grondig de voorbeelden en niet-voorbeelden in 4.1.3. Je leert er met definitie van continuïteit omgaan, niet alleen conceptueel maar ook technisch. Ga zeker niet achteloos voorbij aan de opdrachten/oefeningen die impliciet in dit stukje tekst verweven zitten. Eén voorbeeldje (maar er is meer te doen!):

   (a) Bovenaan p.201, bij het slot van het bewijsje van de continuïteit van de sinus-functie, staat "...en dus is ...". Leg die "dus" nauwkeurig uit.

5. Bestudeer grondig 4.2. Probeer in elk geval voor de eigenschappen die je als "niet-echt-verrassend" inschat (en er zijn er heel wat bij die inderdaad niet wereldschokkend zijn) zelf een argumentatie, een bewijs dus, te vinden vooraleer je het in de cursus naleest.

6. Herbekijk nu de teasers uit 1. Kan je nu een antwoord vinden op de teasers die je eventueel in het begin nog open moest laten? Wissel hierover van gedachte en signaleer eventuele problemen op het forum. **Gebruik voor elke (sub-)teaser een aparte discussielijn.**

Voorbereidingsopdrachten Les 9

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 9 - . . . " met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:

- Consolideren inzichten over continuïteit
- Limieten van functies (II.4.3, II.4.4, II.4.5)
- Opfrissing 'afgeleide' voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (II.5.1, II.5.2)

Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Maak beide onderstaande oefeningen. De bedoeling van deze oefeningen is dat jullie bepaalde inzichten over de relevantie van continuïteit, die vorige les al aan bod kwamen, consolideren. Bovendien hebben deze twee oefeningen een meer generiek karakter, m.a.w. hun belang is ruimer dan het concrete onderwerp (continuïteit) waar het hier nu 'toevallig' over gaat. Ze laten je immers oefenen in 'het toepassen van een eigenschap/propositie/stelling'. Een cursus wiskunde bevat heel wat 'resultaten' meestal netjes geformuleerd als "Propositie" of "Stelling". Uiteraard dienen die resultaten niet om alleen maar 'ingekaderd' te worden. Ze dienen als 'gereedschap' om problemen op te lossen. Naarmate de cursus vordert wordt ons gereedschapkoffertje steeds meer gevuld. Het is essentieel dat je leert onderkennen **welk** gereedschap uit je koffertje nuttig (of zelfs essentieel) kan zijn om een gegeven probleem op te lossen en dat je dan precies weet **hoe** dat gereedschap moet gebruikt worden in het gegeven probleem.

   (a) De wisselkoers van een bepaalde munt t.o.v. de euro is nu (26/10/2016) precies dezelfde als 4 jaar geleden (26/10/2012). Neem aan dat de functie die de tijdsafhankelijkheid van die wisselkoers beschrijft, continu is. Gebruik de tussenwaardestelling om te argumenteren dat er minstens één moment tussen[1] 26/10/2014 en 26/10/2016 geweest is waarop de wisselkoers net hetzelfde was als 2 jaar eerder.
   Leg heel precies uit hoe je de tussenwaardestelling toepast om het gevraagde aan te tonen.

   (b) Bestaat er een $x \in [-1, 2]$ en een $y \in [0, 3]$ waarvoor

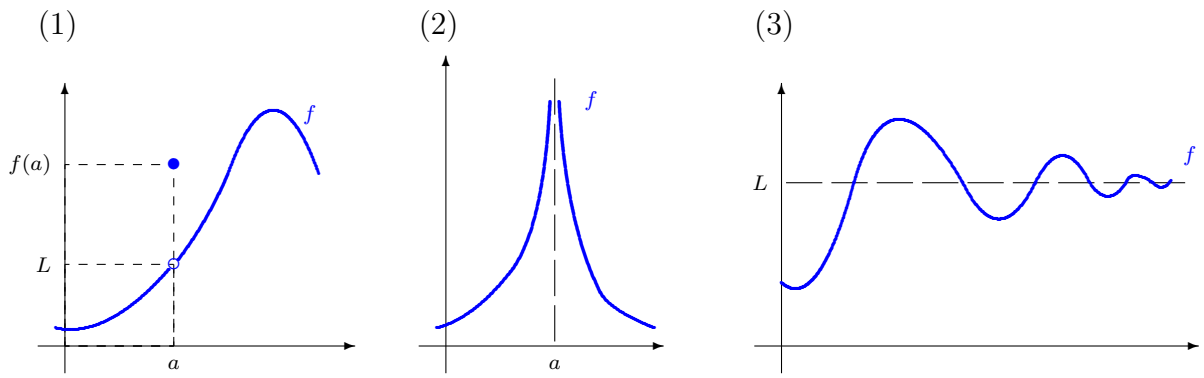
   $$e^{2xy} = y^3 - x^3 \quad \text{én} \quad x + y = 2?$$

   Argumenteer!
   Als je bij je argumentatie beroep doet op bepaalde eigenschappen, proposities of stellingen moet je nauwkeurig formuleren welke eigenschappen, proposities of stellingen je gebruikt en hoe je ze gebruikt.

[1] Met "tussen" bedoelen we hier *niet* "strikt tussen". We laten dus de mogelijkheid toe dat de wisselkoers op het eindmoment, 26/10/2016, dezelfde was als op 26/10/2014.

2. **Baan zelf de weg van intuïtie naar een precieze definitie voor 'limiet van een functie in een punt'.**
Sluit de cursus *en probeer zelf, aan de hand van onderbeschreven stappen, te komen tot de definitie van 'de limiet van een functie in een punt'.*

Beschouw volgende functies gegeven door hun grafiek.



Afgaand op het intuïtief limietbegrip dat elkeen heeft, zijn we geneigd om wat we op deze grafieken zien te omschrijven als:

$$(1)\quad \lim_{x\to a} f(x) = L \qquad (2)\quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (3)\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = L.$$

Wat bedoelen we hier **precies** mee?

Om dit te expliciteren doe je dezelfde verkennende experimenten als bij de stichting van het begrip continuïteit. Teken in elk van de drie gevallen de grafieken in het groot. Teken in gevallen (1) en (2) rijen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ op de X-as die naar a convergeren. *Kies die rijen zo dat $x_k \neq a$ voor alle $k \in \mathbb{N}$*, maar voor de rest willekeurig.[2] Teken de overeenkomstige rijen van functiewaarden $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ op de Y-as. Wat stel je vast voor deze rijen van functiewaarden?
Voor geval (3) teken je een willekeurige rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ op de X-as die $+\infty$ als limiet heeft. Teken weer de overeenkomstige rijen van functiewaarden $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ op de Y-as. Wat stel je vast?

Probeer nu na deze teken-en kijk-experimenten zelf een nauwkeurige definitie te geven voor de definitie van 'de limiet van een functie f in een bepaald punt a'.

<u>Definitie</u>

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op een deel A van $\mathbb{R}$ en een $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. We zeggen dat de limiet van f in a bestaat als ... *(aanvullen)*

[2] Dat je $x_k \neq a$ moet nemen heeft te maken met het feit dat we met de 'limiet van een functie in een punt a' willen beschrijven hoe de functiewaarden zich gedragen 'in de omgeving van dat punt' *maar niet in dat 'punt' zelf.* Dat 'punt' hoeft immers niet te behoren tot het definitiegebied van f zoals in geval (2) hierboven, of het hoeft zelfs niet tot $\mathbb{R}$ te behoren zoals in geval (3) hierboven.

3. Open nu pas de cursus en doe een grondige studie van p.216-234.
   Deze studie begint uiteraard met het confronteren van wat je hierboven in 2 zelf als definitie hebt voorgesteld, met definitie 4.3.3 uit de cursus. Had je zelf helemaal hetzelfde gevonden? Wellicht niet helemaal; waar zit dan het verschil, de verfijning ...? Wissel ervaringen uit op het forum.
   Bij 4.4, eigenschappen van limieten, zou je bij veel resultaten een déjà-vu-gevoel moeten hebben. Het spreekt vanzelf dat je voor die "herkenbare" resultaten zelf de bewijsjes probeert op te stellen.
   Ga bij 4.5, berekenen van limieten, goed na of er geen duistere punten voor jou inzitten (bijvoorbeeld, kan je uitleggen hoe je op p.233 aan de formule voor de oppervlakte van de cirkelsector OAP komt?).

4. Fris II.5.1 en II.5.2 (p.236-254) goed op. Dit stukje gaat over afgeleiden van functies van (een deel van) $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Het is pure humanioraleerstof en zou dus zowel conceptueel als rekentechnisch niet veel problemen mogen opleveren. Signaleer op het forum als er hier toch nog duistere punten zouden zijn. Het spreekt vanzelf dat we er van uitgaan dat je al bedreven bent in het berekenen van afgeleiden die gegeven zijn met een expliciet functievoorschrift. Schud zelf zomaar een paar 'ingewikkelde' functies met een concreet functievoorschrift uit de mouw en ga na dat je ze probleemloos kan afleiden. Maar je inzicht in afgeleiden van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zou nu al dieper moeten gaan dan het Pavlov-reflexgewijs kunnen berekenen van afgeleiden van functies gegeven via een expliciet functievoorschrift. Met een minimaal inzicht zouden bijvoorbeeld onderstaande oefeningen moeten lukken.

   (a) Veronderstel dat f een niet nader gespecifieerde functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is die afleidbaar is. Beschouw dan de functie
   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x^3 + 2x).$$
   Bereken de afgeleide van g in termen van de afgeleide van f.

   (b) Veronderstel dat $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie is, gedefinieerd op een open interval I dat 2 bevat, waarvoor $f(2) = 1$ en die voldoet aan
   $$t^2 f(t) + f(t)^5 = 5 \quad \text{voor alle } t \in I.$$
   Bereken $f'(2)$.

Voorbereidingsopdrachten Les 10

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 10 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Partiële afgeleiden en eerste orde benadering voor functies van meerdere veranderlijken.

Opdrachten
Tijdens de vooruitblik in vorige les hebben reeds we partiële afgeleiden voor functies $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ingevoerd. We zagen niet alleen het concept, maar we leerden ook al de partiële afgeleiden van functies die gegeven zijn door een expliciet functievoorschrift, te berekenen. In deze les gaan we in op de meetkundige betekenis van de partiële afgeleiden (zeer belangrijk omdat dit visuele intuïtie geeft die noodzakelijk is voor een stevig 'mentaal beeld' van het concept). Bovendien gaan we in op een vraag die al opborrelde op het einde van vorige les: de partiële afgeleiden van een functie geven kwantitatieve informatie over wat er met de functiewaarde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gebeurt als als één van de variabelen x_i 'een beetje' wijzigt terwijl de andere vast blijven; maar wat gebeurt er als alle variabelen *simultaan* 'een beetje' wijzigen? Deze vraag zal ons leiden tot de 'eersteordebenadering van een functie rond een bepaald punt'.

Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Eerst gaan jullie zelf de meetkundige betekenis van de partiële afgeleiden ontdekken (althans in het geval van een functie met 2 variabelen).
   Gebruik daartoe de applet[1] die je op Toledo vindt onder "Extra's" om de grafiek te tekenen van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2y - y^3$. Teken de grafiek van die functie in het gebied bepaald door $-2 \leq x \leq 2$ en $-1 \leq y \leq 3$. Dit doe je door in de applet in de rechterkolom onder Minimums en Maximums de goede grenzen voor x en y in te tikken. Vul voor de z-waarde (= de functiewaarde) als minimumgrens -27 in en als maximumgrens 16. Het functievoorschrift tik je bovenaan in als `3*x^2*y-y^3`. Druk op "calculate" en je zal de grafiek zien verschijnen. Vink rechtsonder alle opties behalve de laatste ("Scale box") aan. Vink linksboven de optie "delay regeneration" uit. Nu kan je door met je muis de grafiek 'vast te pakken' en je muis te verschuiven de grafiek vanuit verschillende kanten bekijken.

   (a) Probeer vanuit de grafiek van f zicht te krijgen op de grafieken van de functies

   $$f(\,\cdot\,, -1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x, -1) \quad \text{en} \quad f(2, \,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto f(2, y).$$

[1] Het is mogelijk dat je computer uit veiligheidsoverwegingen weigert deze java-applicatie te draaien. Je zal expliciet toelating moeten geven aan het programma om het te laten runnen. In het verleden bleek dat dit soms niet lukte. Niet getreurd, op het web vind je gemakkelijk andere online-tools om de grafiek van een functie van twee veranderlijken te tekenen. Je kan ze gemakkelijk als alternatief gebruiken om deze opdracht te maken als je de java-applet niet aan de praat krijgt.

Vanuit welke kant moet je de grafiek van f best bekijken om de grafiek van $f(\,\cdot\,,-1)$ te zien verschijnen? Vanuit welke kant kijk je best naar de grafiek van f om de grafiek van $f(2,\,\cdot\,)$ te zien verschijnen? Veralgemeen het inzicht dat je aan de hand van dit voorbeeld gekregen hebt: veronderstel dat je de grafiek van een (willekeurige) functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven hebt; fixeer een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; hoe ontstaan de grafieken van de functies

$$f(\,\cdot\,,b) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,b) \quad \text{en} \quad f(a,\,\cdot\,) : R \to \mathbb{R} : y \mapsto f(a,y)$$

uit de grafiek van f?

(b) Partiële afgeleiden zijn uiteindelijk 'gewone' afgeleiden van functies van één veranderlijke. Dus moet je ze 'ergens' kunnen aflezen als richtingscoëfficiënt van een 'raaklijn'. Kan je je, aan de hand van de applet, in de context van het bovenbeschreven voorbeeld de 'raaklijnen' voorstellen waarvan $D_1f(2,-1)$ resp. $D_2f(2,-1)$ de richtingscoëfficiënten zijn? Veralgemeen je inzicht: als je de grafiek van een willekeurige functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en een punt (a, b) gegeven hebt, hoe kan je dan de 'raaklijnen' zien waarvan $D_1f(a,b)$ resp. $D_2f(a,b)$ de richtingscoëfficiënten zijn?

Deel je ervaringen, vermoedens en vragen over bovenstaande opdrachten met elkaar op het forum!

2. Consolideer de inzichten die je opgedaan hebt met de applet door p.256-261 te lezen. Controleer bij deze gelegenheid nog even of je de rekentechnische vaardigheid van het berekenen van partiële afgeleiden van functies die gegeven zijn door een expliciet functievoorschrift, onder de knie hebt. De voorbeeldjes in 5.3.3 kan je hierbij gebruiken als testcases en als dat nog niet zou volstaan, schud je natuurlijk gemakkelijk zelf een aantal concrete functies uit de mouw waarmee je het partieel afleiden kan inoefenen.

3. Bestudeer zéér grondig 5.4.1 waarin de problematiek van de 'eersteordebenadering' van een functie van twee variabelen wordt verkend en onderzocht. Essentieel hierbij is uiteraard dat je de start van het 'verhaal' goed door hebt. Zo moet je kunnen uitleggen waar (5.6) en (5.7) vandaan komen. En je moet kunnen uitleggen waarom men op p.263 (onder de tekening) voor 'brave' functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ redelijkerwijs verwacht dat $x = (x_1, x_2) \approx a = (a_1, a_2)$ volgende benadering zou moeten opgaan:

$$f(x_1, x_2) \approx f(a_1, a_2) + D_1f(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + D_2f(a_1, a_2)(x_2 - a_2).$$

Tip: voor dat laatste kan het helpen om je voor te stellen dat f een functie is die de hoogte van een landschap als functie van de plaats beschrijft en dat jij je bevindt op het punt met coördinaten (a_1, a_2); interpreteer dan de benaderingsformule in die context; waarom is die plausibel voor 'normale' landschappen?
Wissel ideeën uit op het forum.

4. Bestudeer grondig hoe in 5.4.2 en 5.4.3 de vragen en de inzichten uit 5.4.1 worden geconsolideerd in stellingen. Schenk aandacht aan de nieuwe begrippen die hierbij opduiken (eerste ordebenadering, totale afgeleide, Jacobiaan) en aan de meetkundige interpretatie (althans in het geval van twee variabelen, dus het geval waarbij we ons de grafiek van de functie visueel kunnen voorstellen). Signaleer op het forum de punten die eventueel dusiter voor je zijn.

5. Bestudeer hoe in 5.4.4 de eersteordebenadering wordt toegepast. Signaleer op het forum de punten die eventueel dusiter voor jou zijn.

Voorbereidingsopdrachten Les 11

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 11 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
De kettingregel voor functies van meerdere veranderlijken.

Opdrachten:
Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Tijdens de 'vooruitblik' op het einde van vorige les, zagen we dat de 'gewone' kettingregel, we bedoelen de oude vertrouwde kettingregel voor functies van één veranderlijke, het base-camp is voor de beklimming van de 'algemene' kettingregel voor functies van meerdere veranderlijken. Zorg er dus eerst voor dat je de 'gewone' kettingregel perfect beheerst. Zeer belangrijk is dat je die kettingregel niet enkel Pavlovsgewijs kan toepassen als alle functies die in het spel zijn, gegeven zijn via een expliciet functievoorschrift, maar dat je ook het inzicht hebt waarmee je oefeningetjes als bijvoorbeeld oefening (a) van de voorbereidingopdracht 4 voor les 9 met je ogen dicht kan oplossen.

2. **Open de cursus nu nog niet**, maar bekijk eerst opnieuw de verschillende veralgemeningsstappen (van 1 naar 2, van 1 naar 3, van 3 naar 4 en van 4 naar 5) die we tijdens de preview hebben uitgestippeld (de slides van die preview zijn bij de agenda gevoegd). Voor je inzicht is het primordiaal dat je voldoende tijd uittrekt om zelf tot het inzicht te komen welke de gemakkelijke en welke de delicate veralgemeningsstappen zijn en (vooral !) **waarom**. Het antwoord op de "welke"-vraag zal misschien al min of meer tijdens de vooruitblikfase in de vorige les gegeven zijn (afhankelijk van de dynamiek en de interactie in de les). Maar het volstaat niet dat je enkel op de "welke"-vraag kan antwoorden op basis van een herinnering. Want je moet ook haarfijn kunnen uitleggen **waarom** sommige stappen slechts peanuts zijn. Indien je deze essentiële denkoefening overslaat, zal je straks, wanneer je in de cursus gaat lezen, merken dat je stellingen 5.5.3 en 5.5.4 (en hun bewijsjes) "niet zo goed snapt"[1].
   Als test om te zien of je voldoende nagedacht hebt over deze punten, zou je **nu al, dus voordat je in de cursus begint te zoeken,** minstens één van de voorbeeldoefeningetjes die op de laatste slide van de preview staan, probleemloos moeten kunnen maken! Welke? En maak die dan nu ook meteen. Post je ervaringen met deze opdracht op het forum.

3. **Open nu pas je cursus** en maak een grondige studie van p.275 - p.281. Besteed hierbij ook voldoende veel tijd aan het rekentechnische aspect. In de tekst staan heel

[1] Sporten vraagt opwarming (naar het schijnt), stellingen begrijpen ook ...

wat voorbeelden. Schud zelf voor elk van de stellingen (5.5.2, 5.5.3 en 5.5.4) minstens nog één eigen voorbeeld uit je mouw en breng die mee naar de les. Ook de voorbeeldjes die op de laatste slide van de preview staan, zouden nu allemaal een fluitje van een cent moeten zijn om uit te werken (althans als we aannemen dat de functies g die daar opgevoerd worden, voldoen aan de regulariteitvoorwaarden zoals beschreven in de stellingen 5.5.2 en 5.5.3). Minstens één van die oefeningetjes moest trouwens al een fluitje van een halve cent geweest zijn bij voorbereidingsopdracht 2.
Post eventuele knelpunten (en reacties) op het discussieforum.

Voorbereidingsopdrachten Les 12

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 18:00. Geef al die posten als titel "Les 12 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Toepassingen op de kettingregel: homogene functies, richtingsafgeleiden en gradiënt.

Opdrachten:
Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. (a) **Open de cursus nu nog niet.** Herlees eerst op de slides van de preview (ze zijn als pdf bijgevoegd bij de agenda) de definitie van "homogene functie". Lineaire functies zijn homogeen van graad 1. Het omgekeerde geldt niet: er zijn functies die homogeen zijn van graad 1 maar toch niet lineair zijn Een voorbeeld hiervan is

$$f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}.$$

Ga na dat dit effectief een voorbeeld is en geef zelf nog minstens twee andere voorbeelden van functies die homogeen zijn van graad 1 maar niet lineair. Zorg ervoor dat minstens één van je voorbeeld een functie is van meer dan twee veranderlijken. Wissel voorstellen uit op het forum.

(b) **Nog steeds met gesloten cursus.** Schrijf de algemene vorm neer van een lineaire functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en bereken voor alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de uitdrukking

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wat stel je vast? Wissel hierover van gedachte op het forum.
Als het goed is, heb je in 1(a), naast het voorbeeld dat we daar zelf al gaven, nog minstens twee andere functies $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gevonden die homogeen zijn van graad 1 maar niet lineair. Bereken voor elk van die (minstens) drie functies voor alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ de uitdrukking

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wat stel je vast? Kan je vermoeden dat wat je ziet optreden, algemeen geldt (dus los van de concrete testvoorbeeldjes die je gekozen hebt)? Wissel hierover van gedachte op het forum.

(c) **Nog steeds met gesloten cursus.** Verzin zelf minstens twee concrete voorbeelden van homogene functies $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ met een homogeniteitsgraad $r \neq 1$. Zorg ervoor dat je voorbeelden voldoende verschillend zijn door het aantal veranderlijken (n) en de homogeniteitsgraad (r) in je voorbeelden verschillend te laten zijn.
Bereken voor elk van die (minstens) twee functies voor alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ de uitdrukking

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wat stel je vast? Kan je vermoeden dat wat je ziet optreden, algemeen geldt (dus los van de concrete testvoorbeeldjes die je gekozen hebt)? Zou je dat vermoeden zelf hard kunnen maken? Wissel hierover van gedachte op het forum.

(d) **Open nu pas je cursus** en bestudeer daar het stukje over homogene functies (deeltje 5.5.5 van hoofdstuk II, p.282-p.285). Worden je vermoedens uit (b) en/of (c) bevestigd?

2. (a) **Sluit nu opnieuw de cursus** en herbekijk het 'hoe-steil-is-het'-probleem dat we op het einde van vorige les bij wijze van preview hebben gepresenteerd (zie slides). Spendeer voldoende tijd om **zelf** proberen te achterhalen hoe je kan vinden "hoe steil het is in noordoostelijke richting". Andermaal is het uit den boze voor je leerproces om hier al te snel de handdoek te gooien en gemakshalve te gaan nalezen in de cursus wat er moet gebeuren. De kans is dan groot dat het concept richtingsafgeleide voor jou wereldvreemd en dus onbruikbaar blijft.
Wissel ervaringen en ideeën uit op het forum.

(b) Open **nu pas** opnieuw je cursus en bestudeer grondig deel 5.6 uit hoofdstuk II (p.288-p.291). Als de taak in punt 2(a) gelukt is, zou in elk geval de definitie van richtingsafgeleidde niet meer mysterieus mogen zijn. Kan je bijvoorbeeld uitleggen waarom men in die definite werkt met een vector $u \in \mathbb{R}^n$ met norm 1? M.a.w. waarom is het belangrijk dat die vector genormeerd is?
Zorg er ook voor dat je het begrip gradiënt onder de knie hebt. Probeer ook zelf eens de gradiënt te berekenen en te schetsen voor een ander (eenvoudig) voorbeeld naar eigen keuze dan dat dat uitgewerkt staat in de cursus. Verbind de schets van de gradiënt met de grafiek én de niveaulijnen van de functie die je gekozen hebt. Breng je schetsen mee naar de les en hou je niet in om een en ander op het forum te posten.

(c) Maak onderstaande oefening en breng je (poging tot) oplossing mee naar de les. Belangrijk bijvraagje om te zien of je ondertussen het concept richtingsafgeleide voldoende begrijpt om het te herkennen: Wat is eigenlijk het verband tussen deze oefening en het begrip richtingsafgeleide? Wissel ideeën uit op het forum.

Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Ga na dat f partieel afleidbaar is in $(0, 0)$ en bereken $D_1 f(0, 0)$ en $D_2 f(0, 0)$.
- Neem nu een $\theta \in [0, 2\pi]$ en beschouw de functie

$$g_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g_\theta(t) = f(t \cos\theta, t \sin\theta).$$

Geef expliciet het functievoorschrift van g_θ. Gebruik dit om na te gaan dat g_θ afleidbaar is in 0 voor alle $\theta \in [0, 2\pi]$ en bereken $g'_\theta(0)$.

- Vergelijk $g'_\theta(0)$ met $D_1 f(0,0) \cos\theta + D_2 f(0,0) \sin\theta$. Geef commentaar.

Voorbereidingsopdrachten Les 13

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 13 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Extrema: nodige voorwaarden.
Middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange, voldoende voorwaarde voor extrema voor functies van één veranderlijke.

Opdrachten:
Het onderwerp van deze les bevat heel wat materiaal waarmee je al vertrouwd bent vanuit het middelbaar. In het hoorcollege zullen we (zoals steeds) enkel focussen op de dingen die jullie via het forum als moeilijk hebben aangemerkt.
Voer onderstaande opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Bestudeer grondig het korte stukje 5.7, extrema. Belangrijk hier zijn de afspraken (dus de definities) en de nodige voorwaarde voor een extremum. Vergewis je ervan dat je het bewijs van Propositie 5.7.3 goed begrijpt. Als je dat argument goed begrijpt zou de volgende oefening een fluitje van een cent moeten zijn.

   (a) Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie gedefinieerd op een open deel A van $\mathbb{R}^n$. Zij $u \in \mathbb{R}^n$ een genormeerde vector (dus $\|u\| = 1$). Veronderstel dat f een lokaal extremum bereikt in een bepaalde $a \in A$ en dat f afleidbaar is in a volgens de richting u. Wat kan je besluiten over $D_u f(a)$? Argumenteer nauwkeurig.

2. Maak nu "onbevangen", **dus met gesloten cursus maar puur op basis van wat je nog weet (zou moeten weten) uit het middelbaar onderwijs**, onderstaande opwarmingsoefening. Wissel met elkaar van gedachte op het forum.

   Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie.
   We noemen f **stijgend** over een interval $I \subseteq \mathbb{R}$ als voor alle $x, y \in I$ met $x \leq y$ geldt dat $f(x) \leq f(y)$. We noemen f **strikt stijgend** over I als het vorige geldt met strikte ongelijkheden.

   Veronderstel nu dat f afleidbaar is.

   - Zijn volgende uitspraken, (a) tot en met (e), waar of vals?
   - Is het gemakkelijk om de ware uitspraken aan te tonen puur op basis van de definities van "afgeleide" en "(strikt) stijgend zijn"? **Probeer dit zeker zelf aan den lijve te ondervinden door het simpelweg te proberen!** Wissel ervaringen uit op het forum. We kunnen nu al prijsgeven dat minstens één van de ware uitspraken zeer gemakkelijk te bewijzen rechtstreeks vanuit de definities te bewijzen is. Dit moét je echt zelf kunnen vinden **zonder in de cursus te gaan 'spieken'**...

(a) Als f stijgt over een open interval I,
dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.

(b) Als f strikt stijgt over een open interval I,
dan is $f'(x) > 0$ voor alle $x \in I$.

(c) Als $f'(x) \geq 0$ voor alle x in een open interval I,
dan stijgt f over I.

(d) Als $f'(x) > 0$ voor alle x in een open interval I,
dan stijgt f strikt over I.

(e) Als $f'(x) > 0$ in een punt $x \in \mathbb{R}$,
dan bestaat er een open intervalletje rond x waarop f stijgt.

3. Bestudeer vervolgens deel 5.8 tot en met 5.8.8.6. Maak hierbij volgende opdrachten.

(a) Illustreer met eigen gevonden voorbeelden het belang van **elk** van de voorwaarden in de middelwaardestelling van Rolle (d.w.z. geef voorbeelden die aantonen dat de conclusie van de stelling van Rolle niet meer hoeft op te gaan zodra één van de voorwaarden van de stelling niet voldaan is).

(b) Iemand is tevreden met volgende afgezwakte versie[1] van de middelwaardestelling van Rolle.

> Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie op een begrensd gesloten interval $[a, b]$.
> Veronderstel dat $f(a) = f(b)$. Dan bestaat er een $c \in [a, b]$ zo dat $f'(c) = 0$.

Hij geeft voor die afgezwakte stelling volgend argumentatie:

> Omdat f continu is op $[a, b]$, weten we dat f in minstens één punt c van $[a, b]$ haar maximale functiewaarde bereikt. Omdat in een maximum de afgeleide nul moet zijn, vinden we dat $f'(c) = 0$.

Beoordeel deze argumentatie. Wissel van gedachte op het forum.

(c) De middelwaardestelling van Lagrange wordt bewezen door op een goed gekozen hulpfunctie g de middelwaardestelling van Rolle toe te passen. Teken de grafiek van de functie g op dezelfde tekening als die waar de grafiek van de functie f getekend staat (bovenaan p.303) en leg dan aan de hand van die tekening uit hoe men op het idee van die hulpfunctie gekomen is om de middelwaardestelling van Lagrange af te leiden uit die van Rolle.

4. Maak onderstaande optimalisatieoefening. Wissel ideeën uit op het forum. Breng je (poging tot) oplossing mee naar de les.
Deze oefening is van kapitaal belang! Ze laat zien dat optimalisatievraagstukken oplossen meer vereist dan het klakkeloos en slaafs toepassen van receptjes. In echte toepassingen ga je steevast zelf eerst de te optimaliseren functie moeten opstellen[2]. En die vaardigheid leer je enkel al doende (of minstens al proberende). Het louter kunnen

[1] Waarom is dat een zwakkere versie dan de "echte" middelwaardestelling van Rolle zoals je die in de cursus vindt?

[2] Merk op dat in de opgegeven oefening met een heel concrete totale kostfunctie en vraagfunctie gewerkt wordt (dus ipso facto niet realistisch). Maar dat dient hier enkel omdat jullie de berekeningen gemakkelijk concreet zouden kunnen uitvoeren. De strategie die je moet bedenken om deze oefening aan te pakken is echter meteen veralgemeenbaar naar een algemene setting.

begrijpen van de oplossing die een ander gevonden heeft, levert ongeveer niets op voor je leerproces.

Een monopolist produceert een goed. Zijn totale kostfunctie wordt gegeven door

$$K : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : q \mapsto K(q) = \frac{1}{2}q^2 + 20q + 10$$

waarbij $K(q)$ = totale kost (uitgedrukt in euro) om q eenheden van het goed te produceren. De vraag van de consument naar dit goed in functie van de verkoopprijs p (in euro) wordt gegeven door

$$V : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : p \mapsto V(p) = 60 - \frac{p}{2}.$$

De overheid overweegt om op het goed een accijnsbelasting van t euro per eenheid te leggen ten laste van de monopolist. Bij welke t zal de overheid haar inkomsten door deze accijnsbelasting maximaliseren gegeven het feit dat de monopolist in alle omstandigheden zijn winst zal maximaliseren?

Voorbereidingsopdrachten Les 14

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 18:00. Geef al die posten als titel "Les 14 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Alle vragen zijn welkom maar denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.
- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Hogere orde afgeleiden, middelwaardestelling van Taylor

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Denk "onbevangen" (dus met gesloten cursus) na over het volgende: je bent aan het skiën in een prachtig glooiend sneeuwlandschap. Je houdt even halt om van het landschap te genieten. Daarbij valt het je op dat in welke richting je ook vanaf dat rustpunt zou vertrekken, je altijd eerst een stukje bergaf zou gaan. Mag je besluiten dat dat rustpunt een lokaal hoogtemaximum is in het landschap? Overtuig de anderen (en jezelf) dat je besluit correct is. Gebruik het forum om van gedachte te wisselen en te testen of je de anderen met je argumentatie kan overtuigen.

2. Bestudeer deeltje 5.9 van hoofdstuk 2 (p. 320 - p. 323) in de cursus.

3. **Sluit nu de cursus** en voer dan zeer nauwgezet onderstaande taak uit. Ze werd reeds ingeleid tijdens de preview in vorige les. Communiceer met elkaar over je bevindingen, vermoedens en eventuele problemen op het forum. Breng je resultaten mee naar de les.

Beschouw een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veronderstel dat we f zeer goed kennen in een punt $a \in \mathbb{R}$. Kunnen we dan iets zeggen over de waarde van $f(x)$ voor $x \neq a$?

   Deze probleemstelling — zoals overigens vele initiële probleemstellingen die de kiem zijn van een interessant onderzoek — is natuurlijk veel te vaag om meteen een eenduidig antwoord toe te laten. Wat betekent het immers dat we een functie f "zeer goed kennen" in a? En wat is "iets zeggen over"?

   - Als we met "f zeer goed kennen in a" bedoelen dat we $f(a)$ kennen, dan kunnen we eigenlijk niets zeggen over $f(x)$ voor $x \neq a$. In termen van de grafiek van f betekent dit dat we enkel het punt $(a, f(a))$ gegeven hebben. We hebben er het raden naar hoe de grafiek er voor de rest uitziet. Als we weten dat f continu is in a, kunnen we hooguit zeggen dat $f(x) \approx f(a)$ als $x \approx a$.
   - Veronderstel dat f afleidbaar is in a en dat we niet alleen $f(a)$ maar ook $f'(a)$ kennen. Dan kunnen we al iets meer zeggen. We weten immers dat dan $f(x) \approx f(x) + f'(a)(x - a)$ als $x \approx a$ (cf. eerste ordebenadering). In termen van de grafiek van f betekent dit dat we het punt $(a, f(a))$ én de raaklijn aan de grafiek in dat punt gegeven hebben.

– Veronderstel dat f twee maal afleidbaar is in a en dat we $f(a)$, $f'(a)$ én $f''(a)$ kennen. Dan kunnen we nog iets meer zeggen over f in de buurt van a. Het teken van $f''(a)$ leert ons of de eerste orde benadering voor $f(x)$ voor x in de buurt van a een te grote of een te kleine benadering oplevert. Het teken van $f''(a)$ geeft immers informatie over de "kromming" van de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.

– Veronderstel dat f drie maal afleidbaar is in a en dat we $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ én $f'''(a)$ kennen. Hoe kunnen we die informatie gebruiken om iets te zeggen over $f(x)$ voor $x \neq a$?

$\vdots$

Hieruit kristalliseert zich volgende probleemstelling:

Beschouw een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die oneindig keer afleidbaar is. Zij $a \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat we de rij $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), f^{(4)}(a), \dots)$ kennen. Is f hierdoor uniek vastgelegd, m.a.w. kunnen we $f(x)$ voor alle $x \neq a$ vanuit deze rij terugvinden?

We doen een paar experimenten om wat voeling te krijgen met dit probleem.

<u>Experiment 1: veeltermfuncties</u>

(a) Kies zelf een concrete veeltermfunctie f. Beperk de graad tot 3 of 4 om het rekenwerk niet al te lang te maken.

(b) Neem eerst $a = 0$.
Bereken $f(a)$ en de opeenvolgende afgeleiden $f^{(k)}(a)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.
Kan je f reconstrueren uit $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots)$?
M.a.w. kan je een formule geven die $f(x)$ voor een willekeurige $x \in \mathbb{R}$ uitdrukt in termen van $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots)$?

(c) Kies nu een (concrete) $a \neq 0$, bv. $a = 1$. Kan je het vorige herdoen voor deze a?

(d) Zou dit nu voor elke veeltermfunctie (van eender welke graad) en gelijk welke a lukken? Formuleer je vermoeden heel nauwkeurig in de vorm van een would-be-propositie (Als ..., dan ...). Je vermoeden moet een formule bevatten die $f(x)$ voor een willekeurige $x \in \mathbb{R}$ uitdrukt in termen van $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots)$.

Na dit experiment zal je geleerd hebben dat de hoger geformuleerde probleemstelling voor veeltermfuncties een positief antwoord heeft. Maar wat als de functie in kwestie geen veeltermfunctie is? Een nieuw experiment dringt zich op.

<u>Experiment 2: sinusfunctie</u>

(a) Neem voor f de sinusfunctie. Voor de eenvoud nemen we $a = 0$. Bereken $f(a)$ en $f^{(k)}(a)$ voor $k = 1, 2, 3, 4, \dots$.

(b) Wat is een eerste opvallend kwalitatief verschil tussen de rij $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots)$ die je hier vindt, en de rij die je hiervoor in experiment 1 hebt gevonden?

(c) De formule die je in je vermoeden op het eind van experiment 1 hebt gevonden, is dus zeker niet zonder meer overdraagbaar op de nieuwe situatie.
Je kan wel voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $(f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots, f^{(n)}(a))$ een veeltermfunctie P_n van de n-de graad definiëren geïnspireerd door de formule uit je vermoeden uit experiment 1. Doe dit: $P_n(x) = \dots ? \dots$

(d) Is er een $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $P_n = \sin$? Waarom wel of waarom niet?

(e) Plot op een zelfde tekening[1] de grafieken van sin, P_1, P_3, P_5, P_7, P_9, ... Wat stel je vast?

4. **Open nu de cursus** en bestudeer de **formulering** van de Middelwaardestelling van Taylor (Stelling 5.10.2 op p.326). Laat het bewijs voorlopig nog links liggen en lees dus niet meer dan de formulering van de stelling (dus enkel wat in het kadertje staat).

   (a) Zie je aan die formulering wat de relevantie van de stelling is voor de probleemstelling waarmee opdracht 3 hierboven opende?

   (b) Kan je door gebruik te maken van de stelling het vermoeden dat je formuleerde bij (d) van experiment 1 bewijzen?

   (c) Kan je door gebruik te maken van de stelling het fenomeen dat je vastgesteld hebt bij (e) van experiment 2 verklaren? Beperk je hiervoor desnoods in eerste instantie tot x in het interval $[-1, 1]$.

   (d) Wat zegt de Middelwaardestelling van Taylor in het speciaal geval dat n=0. Herformuleer nauwkeurig de stelling in dit speciaal geval. Herken je de bewering die dan verschijnt?

   Post je bevindingen/vragen hierover op het forum.

5. Bestudeer tenslotte ook het bewijs van de Middelwaardestelling van Taylor in de cursus. Indien je niet meteen je weg vindt in het bewijs, kan het als "opstapje" helpen om het bewijs eens te herschrijven/vereenvoudigen voor een paar kleine waarden van n (bijvoorbeeld $n = 1$ en $n = 2$).

[1] Op het web vind je moeiteloos tal van applets waarmee je eenvoudig grafieken van functies kan tekenen. Bijvoorbeeld op `http://rechneronline.de/function-graphs/` kan je gemakkelijk de grafieken van 3 functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ simultaan plotten.