Voorbereidingsopdrachten Les 15

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 15 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Taylorreeksen - voldoende voorwaarde voor extremum in termen van 2de orde afgeleide (voor 1 veranderlijke) - Middelwaardestelling van Taylor voor functies met meerdere veranderlijken.

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Maak eerst twee onderstaande oefeningen. Dit zou moeten lukken puur op basis van wat in de vorige les gezien werd. Deel je bevindingen, vragen en antwoorden of suggesties hierover met elkaar op het forum.

   (a) Zij $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie op een open interval die onbeperkt afleidbaar is. Neem een $a \in \mathbb{R}$ en een $n \in \mathbb{N}_0$. Beschouw de veeltermfunctie

   $$P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

   Vergelijk de afgeleiden van orde 1 tot en met $(n+1)$ van de functie f in a met die van P_n in a. Wat stel je vast?

   (b) Gebruik de Middelwaardestelling van Taylor (met een restterm van orde 3) om aan te tonen dat

   $$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{voor alle } x \in [0,1]$$

2. Maak vervolgens een zeer grondige studie van 5.10.3 tot en met 5.10.6.2 (p.327 - p.340). Post de punten die je moeilijk vindt en extra uitleg over wil, op het forum.
   Tip bij het exploreren van 5.10.5 (stelling van Taylor voor meerdere veranderlijken): als je wat geïntimideerd bent door de notatie kan het als opstapje helpen dat je zelf alles eens uitschrijft voor $n = 2$, dus voor functies van 2 veranderlijken.

3. Maak oefening 6 van reeks 5.10.7 (p.351). Dit is meteen een test of je het belangrijke idee dat in het bewijs van Propositie 5.10.6.1 zit, echt gesnapt hebt. Breng (zoals steeds) je resultaat mee naar de les.

Voorbereidingsopdrachten Les 16

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 16 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Met behulp van de Middelwaardestelling van Taylor voor functies van meerdere veranderlijken naar een voldoende voorwaarde voor een extremum voor functies van twee veranderlijken.
Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Maak eerst **"onbevangen" (d.w.z. zonder eerst in de cursus te lezen)** volgende opwarmingsoefening.

   (a) Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Bereikt f een **globaal** extremum over $\mathbb{R}^2$? Argumenteer!

   Je moet dit "artisanaal" kunnen oplossen, d.w.z. met zeer elementaire argumenten die enkel gebruik maken van wat je al lang weet en dus **zonder** gebruik te maken van "voorhamers" van stellingen die te maken zouden hebben met nodige en/of voldoende voorwaarden voor een extremum (zoals 5.7.3 en 5.10.6.5). Deel je bevindingen met elkaar op het forum.

2. Bestudeer nu grondig 5.10.6.5 tot en met 5.1.6.10 (p.341 - p.350) in de cursus. Post de punten waarover je extra uitleg wil op het forum.

3. (a) Veronderstel dat f een afleidbare functie is van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die precies één kritiek punt heeft en die in dat punt een lokaal extremum bereikt. Mag je besluiten dat dat lokale extremum globaal is? Argumenteer!

   (b) Bekijk nu opnieuw de functie f uit de opwarmingsoefening 1(a). Vind alle kritieke punten van f. Ga na of f in die kritieke punten een lokaal extremm bereikt. Confronteer je bevindingen uit 1(a) en 3(b) enerzijds met 3(a) anderzijds. Wissel ervaringen uit op het forum.

4. We hebben het opstellen van een algemene voldoende voorwaarde voor een extremum in een kritiek punt van een functie van drie of meer veranderlijken uitgesteld tot semester 2 (zie opmerking in het midden van p.343). Maar als je het idee van het bewijs van Stelling 5.10.6.5 echt gesnapt hebt – en dat zou het geval moeten zijn ! – moet je nu, na de grondige studie in 2, al in staat zijn je plan te trekken bij functies van meer dan 2 veranderlijken in speciale gevallen. Onderstaande oefening zou bijvoorbeeld moeten lukken.

Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een functie die continue partiële afgeleiden van de tweede orde heeft. Veronderstel dat f vier kritieke punten heeft, zeg a, b, c en d.

(a) We weten dat

$$D^2_{1,1}f(a) = 2,\ D^2_{2,2}f(a) = 1,\ D^2_{3,3}f(a) = 4 \ \text{ en } \ D^2_{i,j}f(a) = 0 \text{ voor } i \neq j.$$

Mag je besluiten dat f een lokaal extremum bereikt in a en, zo ja, is dit dan een lokaal minimum of maximum? Argumenteer!

(b) We weten dat

$$D^2_{1,1}f(b) = 2,\ D^2_{2,2}f(b) = -1,\ D^2_{3,3}f(b) = 4 \ \text{ en } \ D^2_{i,j}f(b) = 0 \text{ voor } i \neq j.$$

Mag je besluiten dat f een lokaal extremum bereikt in b en, zo ja, is dit dan een lokaal minimum of maximum? Argumenteer!

(c) We weten dat

$$D^2_{1,2}f(c) = D^2_{2,1}f(c) = 1,\ D^2_{3,3}f(c) = 4$$
$$\text{en } \ D^2_{i,j}f(c) = 0 \text{ voor alle andere } (i,j)\text{-combinaties.}$$

Mag je besluiten dat f een lokaal extremum bereikt in c en, zo ja, is dit dan een lokaal minimum of maximum? Argumenteer!

(d) We weten dat

$$D^2_{1,1}f(d) = -2,\ D^2_{2,2}f(d) = -1,\ D^2_{3,3}f(d) = -3,\ D^2_{1,3}f(d) = D^2_{3,1}f(d) = 1$$
$$\text{en } \ D^2_{i,j}f(d) = 0 \text{ voor alle andere } (i,j)\text{-combinaties.}$$

Mag je besluiten dat f een lokaal extremum bereikt in d en, zo ja, is dit dan een lokaal minimum of maximum? Argumenteer!

Voorbereidingsopdrachten Les 17

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 17 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.
- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Optimalisatieproblemen (slot) + aanvullende topics over afgeleiden

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Werk zorgvuldig onderstaande opdracht uit. Het is een twee-variabelen-upgrade van een oefening die we vroeger reeds maakten. Breng je (poging tot) oplossing mee naar de les.

   Beschouw de context van de prijsdiscrimerende monopolist zoals beschreven in 5.10.6.8 op p.344 en 345 van het handboek.

   Veronderstel nu dat er een overheid is die beide markten controleert en die overweegt om een accijnsbelasting ten laste van de monopolist te heffen: t_1 per verkochte eenheid in markt 1, t_2 per verkochte eenheid in markt 2.

   (a) Noteer met $q_1^*(t_1, t_2)$ resp. $q_2^*(t_1, t_2)$ de hoeveelheden die de monopolist op markt 1 resp. markt 2 moet aanbieden om zijn winst te maximaliseren gegeven het feit dat de overheid een accijnsbelasting (t_1, t_2) heft.
   Veronderstel dat de overheid de accijnsbelasting t_1 in markt 1 laat stijgen terwijl ze de accijnsbelasting t_2 in markt 2 onveranderd laat. Verwacht je een effect op $q_2^*(t_1, t_2)$? Waarom wel of waarom niet? Argumenteer op basis van economische intuïtie.

   (b) Controleer wiskundig of je vermoeden in (a) correct is. Pak dit zorgvuldig en stapsgewijs aan. Begin dus met het nauwkeurig wiskundig formuleren van het achterliggende optimalisatieprobleem (wat is de te maximaliseren functie? ...).

   (c) Veronderstel dat de overheid haar inkomsten verkregen via de accijnsbelasting wil maximaliseren. Welke accijnsbelasting (t_1^*, t_2^*) moet ze dan heffen gegeven het feit dat de monopolist in alle omstandigheden zijn winst zal maximaliseren. Pak dit probleem andermaal zorgvuldig en stapsgewijs aan. Begin dus ook hier met het nauwkeurig wiskundig formuleren van het optimalisatieprobleem (wat is de te maximaliseren functie? ...).

   (d) Noteer met $\tilde{W}$ de maximale winst die de monopolist kan halen in het scenario dat er geen accijnsbelasting geheven wordt (dus het scenario van het handboek). Noteer met I^* de maximale inkomsten die de overheid via accijnsbelasting binnenrijft (dus door het heffen van accijnsbelasting (t_1^*, t_2^*)) en met W^* de winst die de monopolist in dat accijnsscenario haalt. Vergelijk $\tilde{W}$ met $W^* + I^*$ (strikt groter, gelijk, strikt kleiner?). Geef economische commentaar.

2. Bestudeer grondig 5.11.1, het stukje over de Newton-Raphsonmethode, (p. 354-358) en detecteer punten waarover je in de les extra uitleg wil krijgen.
   Wees creatief en denk na over hoe je de methode zou kunnen aanpassen/uitbreiden om numeriek oplossingen van (niet-lineaire) stelsels met twee vergelijkingen en twee onbekenden te benaderen. Post je ideeën hierover op het forum. De dapperen kunnen hun methode al eens uittesten op onderstaand stelsel:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2x^2 + y = 1 \\ x + y + \sin(xy) = 2. \end{cases}$$

   Tip voor het vinden van de methode: het basisidee van de "gewone" (één-variabele) Newton-Raphsonmethode is dat je de vergelijking $f(x) = 0$ vervangt door een benaderende vergelijking van de vorm $F(x) = 0$ waarbij F een eerstegraadsfunctie is die f op de gepaste manier benadert...
   Wissel ideeën uit op het forum en breng je poging(en) mee naar de les.

3. De regel van de l'Hôpital voor het berekenen van limieten heb je ongetwijfeld heel vaak in het middelbaar gebruikt. Beoordeel daarom meteen "onbevangen" (d.w.z. zonder eerst het korte stukje over die regel in de cursus te lezen) onderstaande limietberekening waarin die regel wordt toegepast:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} \qquad \text{(de l' Hôpital, } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} (1+\cos x) \end{aligned}$$

   Daar de limiet in het rechterlid niet bestaat, bestaat ook de limiet in het linkerlid niet.

   Wat denk je van deze berekening? Wissel hierover van gedachten met elkaar op het forum. Bestudeer dan, indien nog nodig, het stukje over de regel van de l'Hôpital, 5.11.2 (p.358-359).

4. Ook het "verloop van functies" (schetsen van grafieken van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) is een klassieker waarmee je wellicht al goed vertrouwd zal zijn. Ga toch na of er punten zijn in dit stuk, 5.11.3 (p.359-363), waar je nog wat uitleg bij wil in de les.

Voorbereidingsopdrachten Les 18

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 18 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Lineaire stelsels: motivatie, probleemstelling, structuur oplossingsverzameling

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Met lineaire stelsels ben je ongetwijfeld reeds goed vertrouwd. Begin dus eerst met "onbevangen" (**dus vooraleer je in de cursus gaat lezen maar puur op basis van het gezonde verstand en wat je nu reeds kent**) volgende vragen te beantwoorden.
   (a) Is een lineair stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden altijd strijdig? Argumenteer!
   (b) Heeft een lineair stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen altijd oneindig veel oplossingen? Argumenteer!
   (c) Beschouw een (niet-homogeen) lineair stelsel, genoteerd in matrixvorm, $AX = B$ (als je niet vertrouwd bent met die matrixnotatie ga dan even kijken op de slides van de preview). Veronderstel dat X_1 en X_2 twee verschillende oplossingen van dat stelsel zijn. Construeer met X_1 en X_2 een oneindige familie van oplossingen van het stelsel $AX = B$. Breng je (poging tot) oplossing mee naar de les

2. Bestudeer vervolgens grondig 1.1 en 1.2 van hoofdstuk III (p.367-374 (bovenaan)). Stel alle bewijsjes op die op 1.2.2 en 1.2.3 als oefening opgegeven staan. Besteed hierbij grote aandacht aan je argumenteerstijl (voorleestest ...). Breng je resultaten mee naar de les. Indien opdracht (c) hierboven niet meteen gelukt zou zijn, probeer dan nu nog eens opnieuw.

3. Om het belang van stelsels ook voor economische modellen te motiveren vanaf de eerste les over stelsels, springen we al even vooruit naar 1.5 (p.387-395). Bestudeer grondig de modellen die daar beschreven staan, vooral dan het opstellen van de vergelijkingen van de modellen. In deze fase moet je je voorlopig nog geen zorgen maken over wat er op de bovenste helft van p.394 verteld wordt over de het bestaan van oplossingen en het aantal vrijheidsgraden van het stelsel dat het open Leontiefmodel beschrijft.

Voorbereidingsopdrachten Les 19

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 19 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Lineaire stelsels: Gauss-Jordan methode, oplosbaarheid en aantal vrijheidsgraden

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Maak eerst "onbevangen" onderstaande bezinningsoefening. Wissel hierover met elkaar van gedachte op het forum.

   We zijn het er allemaal over eens dat een stelsel zoals

   $$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

   zeer eenvoudig op te lossen is. In 1.3.1 van hoofdstuk III zal je straks nog meer dergelijke eenvoudige stelsels ontmoeten. Wat die stelsels zo speciaal en gemakkelijk maakt, is het feit dat ze in "trapvorm" (of in echelonvorm) staan.

   De essentie van de Gauss-eliminatiemethode is dat men een willekeurig (en dus moeilijk) stelsel transformeert naar een stelsel dat in trapvorm staat (en dus gemakkelijk is).

   Veronderstel nu dat je volgend stelsel opgegeven krijgt:

   $$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + y - 4z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

   Iemand stelt voor om bovenstaand stelsel naar een stelsel in trapvorm te transformeren door in de tweede vergelijking de term met x te laten vallen en in de derde vergelijking de termen met x of y. Hij verkrijgt zo het stelsel:

   $$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ y - 4z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

   en dit is nu gemakkelijk op te lossen.

Ben je het eens met die werkwijze?
Leg **zeer nauwkeurig** uit **waarom** wel of **waarom** niet! De verdediging of de kritiek moet betrekking hebben op de werkwijze als dusdanig en moet dus loskomen van het particuliere voorbeeldje waarop de werkwijze hier toegepast wordt. En als je zou vinden dat bovenstaande werkwijze ongeoorloofd is, kan je dan beschrijven **welke** transformaties van het oorspronkelijke stelsel volgens jou wel geoorloofd zijn en **waarom** die dan wel geoorloofd zijn? Ook hier moet je uitleg het particuliere voorbeeldje overstijgen.

2. Doe vervolgens een grondige studie van 1.3 van Hoofdstuk III (p.374 - p.383). Besteed aandacht aan de impliciete opdrachtjes die in de tekst zitten. Signaleer eventuele problemen op het forum.

3. In de humaniora wordt heel vaak de *spilmethode* aangeleerd om lineaire stelsels op te lossen. Kan je uitleggen **hoe** die methode werkt (eventueel aan de hand van een voorbeeld)? En vooral, kan je uitleggen **waarom** ze werkt? Kan je die methode vergelijken met de Gauss-eliminatiemethode?

4. Beschouw volgend stelsel voor twee onbekenden, x en y.

$$\begin{cases} x + y = 2 - a \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een parameter. We lossen dit op via de methode van Gauss;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-a \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 1-a & 1-2a+a^2 \end{array}\right)$$

Merk nu op dat $1 - 2a + a^2 = (1-a)^2$. We kunnen dus op de laatste matrix nog de rijoperatie $R_2 \to R_2/(1-a)$ toepassen en we vinden zo volgende echelonmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Hieruit volgt dan meteen dat $y = 1 - a$ en vervolgens dat $x = 1$.

Besluit:
voor alle $a \in \mathbb{R}$ heeft het stelsel een unieke oplossing, namelijk $(x, y) = (1, 1-a)$.

Ben je het eens met bovenstaande berekening en redenering? Discussieer hierover met elkaar op het forum

5. Soms heeft een stelsel geen oplossingen. Men zegt dan dat het stelsel **strijdig** of **niet oplosbaar** is. Anderzijds kan het gebeuren dat je bij het oplossen van een stelsel een aantal onbekenden vrij mag kiezen. Het aantal vrij te kiezen onbekenden noemt men dan het aantal **vrijheidsgraden** van het stelsel. In 1.4 van Hoofdstuk III wordt een uitdrukking afgeleid voor dat aantal vrijheidsgraden.
Maak nu eerst "onbevangen" (d.w.z. voor het lezen van 1.4 in de cursus) onderstaande oefening. Je kan gemakkelijk de antwoorden puur op basis van het gezonde verstand vinden zonder te verwijzen naar proposities of resultaten die in de cursus staan . Lees **pas nadat je hier ernstig op gezocht hebt**, 1.4 (p.385 - p.387) in de cursus. **Na**

het onbevangen maken van onderstaande oefening zou dit stukje nu zeer "transparant" moeten zijn.

Bepaal **"artisanaal"** de oplosbaarheid en het eventueel aantal vrijheidsgraden in de oplossing van de stelsels waarvan de gerande matrix rijequivalent is met volgende echelonmatrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 7 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 7 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

6. Herbekijk nu het statisch input- outputmodel van Leontief (p.390- p.395) maar dit keer met de focus op het probleem van de oplosbaarheid van het lineair stelsel waartoe het open resp. gesloten Leontiefmodel aanleiding geeft. Kan je voor beide gevallen, open en gesloten, in het algemeen het bestaan van (niet-triviale) oplossingen aantonen? Vanuit economisch standpunt zou je zelfs nog meer dan het loutere "bestaan" verwachten van de oplossing van het Leontief-stelsel. Welke extra eigenschap zou die oplossing volgens jou nog moeten hebben wil ze economisch zinvol zijn? En zie je een manier om in het algemeen te onderzoeken of die extra "verwachte" eigenschap effectief voldaan zal zijn? Wissel hierover van gedachte op het forum.

Voorbereidingsopdrachten Les 20

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 20 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Matrixalgebra

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Doe een grondige studie van p. 396 - p. 413 (dus tot vlak voor 2.4.3). Detecteer de moeilijkheden die je hierbij eventueel ontmoet en signaleer ze op het forum.

2. Bewijs zelf eigenschap (1) van Propositie 2.2.2, eigenschap (4) van Propositie 2.2.3 en alle beweringen van Propositie 2.3.3. Wissel hierover reeds met elkaar van gedachte op het forum. Breng je resultaten mee naar de les.

3. Denk na over de "uitnodiging" over het vinden van voorbeelden in de onderste helft van p.401 en bovenaan p.402. Wissel van gedachte op het forum. Breng wat je gevonden hebt mee naar de les.

4. Maak volgende extra oefeningetjes. Wissel met elkaar van gedachte op het forum en breng je (pogingen tot) oplossingen mee naar de les:

   (a) Bovenaan p. 402 heb je een voorbeeldje moeten vinden van een vierkante matrix A, verschillend van de nulmatrix, waarvoor $A^2 = 0$. Kan je het voorbeeld ook zo geven dat de matrix A symmetrisch is? Argumenteer!
   Merk op: het is niet omdat het bijvoorbeeld niet meteen zou lukken met een symmetrische (2×2)-matrix dat het niet zou kunnen lukken met een pakweg (5000×5000)-matrix ...

   (b) Als a een reëel getal is waarvoor $a^2 = a$, dan moet $a = 0$ of $a = 1$. Kan je een voorbeeld geven van een vierkante matrix A verschillend van de nulmatrix en verschillend van de eenheidsmatrix waarvoor $A^2 = A$? Kan je het voorbeeld zo geven dat A symmetrisch is? En kan je het voorbeeld zo geven dat A inverteerbaar is? Argumenteer!

5. Kijk nu ook al even vooruit naar de voorbereidingsopdrachten over het open Leontief-model die bij volgende les horen (opdrachten 1 en vooral 2 van de voorbereidingstaken voor les 21). Feedback over deze opdracht komt nog niet in les 20 maar pas in les 21. Maar deze (belangrijke!) opdracht vergt wellicht wat meer tijd dan de tijd die je zal hebben in de 2 dagen tussen les 20 en 21. Begin er dus tijdig aan.

Voorbereidingsopdrachten Les 21

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor dinsdag eerstkomend om 20:00. Geef al die posten als titel "Les 21 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Bespreking oplossing oefening ivm Leontiefmodel + determinanten (deel 1)

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Reeds tijdens de preview op het einde van les 19 hebben we het probleem aangekaart van het teken van de oplossingen van een lineair stelsel. Dit probleem werd geïnspireerd vanuit een economische context, in het bijzonder, het open Leontiefmodel. Wil dit model economisch zinvol zijn, dan moet men **in het algemeen** kunnen garanderen dat in dergelijk model positieve externe vragen leiden tot positieve productiehoeveelheden voor elk van de sectoren. Wiskundig komen we zo tot volgend algemene probleemstelling:

   Beschouw een lineair stelsel met vierkante coëfficiëntenmatrix M en rechterlid R:

   $$MX = R.$$

   Wanneer mogen we besluiten dat de oplossingen van dit stelsel positief zijn? Anders geformuleerd, als $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een oplossing is van het stelsel, onder welke condities op M en R zal $x_i \geq 0$ voor alle i?

   Onderzoek volgende "proefballonnetjes" en laat er eventueel zelf ook nog eentje op.

   (a) Als alle elementen van M en R positief zijn, zullen dan de oplossingen van het stelsel positief zijn?

   (b) Als alle elementen van R en alle diagonaalelementen van M positief zijn en de elementen die niet op de diagonaal van M staan, negatief zijn, zullen dan de oplossingen van het stelsel positief zijn?

   Wissel hierover van gedachte op het forum.

2. Werk nauwgezet alle stappen uit van de oefening op p.414-415 in verband met de positiviteit van de oplossing van het open Leontiefmodel (deel 2.4.3). De opgaven zijn zodanig geformuleerd dat je elke stap kan zetten zonder dat je eventueel een vorige stap hebt kunnen uitwerken. Zeggen dat je niets kan vinden omdat je vast zit bij de eerste stap, zou dus een slechte uitvlucht zijn.

   Besteed ruim tijd aan deze oefening. Niet alleen het resultaat op zich is mooi en economisch relevant. Maar het is ook vanuit didactisch standpunt een zeer rijke

oefening omdat meerdere onderdelen van de leerstof van het eerste semester hierin aan bod komen.

Neem zeker de gelegenheid te baat om zeer goed je argumenteerstijl te verzorgen (alsof het voor een examen zou zijn[1]). Doe dus de voorleestest. En ga na of wat je schrijft niet enkel louter grammaticaal klopt (wat gedetecteerd wordt door de voorleestest), maar ook of het (wiskundig) betekenis heeft. Bijvoorbeeld, zeggen dat *een matrix kleiner is dan 1* of dat *een rij van matrices begrensd is* heeft a priori geen betekenis (waarom niet?). Als je dergelijke uitspraken zou willen hanteren, zal je dus eerst nauwkeurig moeten zeggen wat je ermee bedoelt.

Wissel ideeën uit via het forum. Wees daarbij kritisch over elkaars formuleer- en argumenteerstijl. **Dump niet alle forumposten over deze opdracht in één discussielijn.** Om het overzicht te behouden kunnen best per deelopdracht, (a) tot en met (f), aparte lijnen opgestart worden. En naargelang de onderwerpen die jullie aanbrengen, kan het eventueel handig blijken om die lijnen nog verder op te splitsen.

Breng je resultaten mee naar de les. In de les zullen we vertrekken van jullie input (en we hanteren daarbij strikt het principe dat ook in het Leontiefmodel vervat zit: geen input, geen output ...)

3. Bestudeer grondig het eerste deel van determinanten (p. 419 tot net voor Stelling 3.2.5 op p. 430). Besteed de nodige aandacht aan de (soms impliciete) opdrachtjes die in de tekst verweven zitten. Detecteer nauwgezet en nauwkeurig de punten waarmee je het moeilijk hebt en signaleer ze op Toledo.

[1] Deze opdracht was ooit een examenvraag...

Voorbereidingsopdrachten Les 22

- **Alle forumposten met betrekking tot deze voorbereidingsopdrachten moeten gepost zijn voor zondag eerstkomend om 17:00. Geef al die posten als titel "Les 22 - ..." met een korte maar sprekende titel op de plaats van de drie puntjes.**
  Denk eraan dat in het hoorcollege enkel klassikaal wordt ingegaan op die punten die door een significant aantal studenten worden gesignaleerd op het forum.

- **Breng het resultaat van je voorbereidingswerk mee naar de les!**

Onderwerp:
Determinanten (slot)

Opdrachten:
Voer volgende opdrachten uit in de aangegeven volgorde.

1. Doe een grondige studie van het stuk over determinanten dat nog niet aan bod kwam, (p. 430 - p. 437, dus vanaf Stelling 3.2.5). Ga zeker niet voorbij aan wat "ten stelligste aangeraden wordt".

2. Volgende vraag heeft de maken met Stelling 3.2.5. Als je een functie $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ hebt die voldoet aan eigenschappen (1) , (2) én (3) uit de formulering van de stelling, dan moet f de determinantfunctie zijn, d.w.z. dan moet $f(A) = \det(A)$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Illustreer met voorbeelden dat je geen enkele van de eigenschappen (1), (2) en (3) kan missen om dit af te leiden. Geef dus voorbeelden van drie functies $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die enkel voldoen aan resp. (2) en (3), (1) en (3), (1) en (2) en die niet de determinantfunctie zijn.

3. De laatste plenaire sessie van dit semester, les 23 op woensdag 21/12, zullen we opvatten als een **à la carte vragen-anderhalfuurtje.** Hierin willen we ingaan op jullie vragen over om het even welk onderdeel van de leerstof van het bijna voorbije semester. De "populaire" vragen behandelen we klassikaal, de "minder populaire" vragen kunnen we face to face of en petit comité bekijken.

   Post hiertoe vragen in het forum "*à la carte*" dat we speciaal voor die sessie hebben geactiveerd. De deadline voor vragen in dat forum ligt op dinsdag 15/12 12:00. **Maar niemand verbiedt je om daar vroeger al vragen te posten, wel integendeel.** De leerstof van deze les, les 22, over het laatste deel van determinanten, is eerder beperkt en wellicht blijft er wel wat tijd over om al in les 22 een aantal van die à la carte vragen te behandelen. Meer nog dan tot nu toe het geval was, zal het nodig zijn een goede sprekende naam te verzinnen voor je post in het à la carte forum.