

M1 – Wiskundig taalgebruik en notaties

Verzamelingenleer

Verzameling = aantal objecten samengebracht tot een geheel

- Lege verzameling = verzameling die geen elementen bevat $A = \emptyset$
- Singleton verzameling = verzameling die juist 1 element bevat
- Eindige verzameling = verzameling met een eindig aantal elementen $\#A$

Elementen van een verzameling = objecten die tot die verzameling behoren

- $a \in A = a$ is een element van A

A is een deelverzameling van $B = A$ en B zijn verzameling en elk element van A behoort ook tot B

- $A \subseteq B$

Met twee gegeven verzameling A en B kun je op een aantal manieren nieuwe verzamelingen bouwen:

- de **unie** van A en B ; notatie: $A \cup B$.

Dit is de verzameling van de objecten die behoren tot A of B . Dus

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}.$$

- de **doorsnede** van A en B ; notatie: $A \cap B$.

Dit is de verzameling van de objecten die behoren tot A en B . Dus

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}.$$

- het **verschil** van A en B ; notatie: $A \setminus B$.

Dit is de verzameling van de objecten die behoren tot A maar niet tot B . Dus

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}.$$

- het **cartesiaans³ product**, ook de **productverzameling** van A en B genoemd; notatie: $A \times B$.

Dit is de verzameling van de koppels (= geordende tweetallen) (a, b) waarbij $a \in A$ en $b \in B$. Dus

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

Als A en B eindige verzamelingen zijn, is $A \times B$ ook eindig en $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

Implicaties en equivalenties

Uitspraak is waar = uitspraak is voldaan = uitspraak geldt

Implicatie

Als ..., dan ...

$p \Rightarrow q$

- p impliceert q
- Als p, dan q
- q volgt uit p

q is een **nodige voorwaarde** voor p ,

of, anders gezegd,

opdat p zou gelden, is het **nodig** dat q geldt.

Men kan hetzelfde nog anders zeggen:

p is een **voldoende voorwaarde** voor q ,

of nog

opdat q zou gelden, is het **voldoende** dat p geldt.

p	q	$p \Rightarrow q$
waar	waar	waar
waar	vals	vals
vals	waar	waar
vals	vals	waar

scenario		belofte is
p is waar, d.w.z. je bent er door in juni	q is waar, d.w.z. je krijgt een brommer	waar
p is waar, d.w.z. je bent er door in juni	q is vals, d.w.z. je krijgt geen brommer	vals
p is vals, d.w.z. je bent er niet door in juni	q is waar, d.w.z. je krijgt een brommer	waar
p is vals, d.w.z. je bent er niet door in juni	q is vals, d.w.z. je krijgt geen brommer	waar

Equivalentie

Als en slechts als ..., dan ...

$$p \Leftrightarrow q$$

- $p \Rightarrow q$ en $q \Rightarrow p$
- p impliceert q
- Als en slechts als p, dan q

p	q	$q \Leftrightarrow p$
waar	waar	waar
waar	vals	vals
vals	waar	vals
vals	vals	waar

Kwantoren

- de **existentiële kwantor**: $\exists$ (er bestaat een, of, er bestaat minstens één)
- de **universele kwantor**: $\forall$ (voor alle)

Door ontkennen gaat een uitdrukking die begint met een universele kwantor dus over in een uitdrukking die begint met een existentiële kwantor.⁸ Omgekeerd gaat een uitdrukking die begint met een existentiële kwantor door ontkennen over in een uitdrukking die begint met een universele kwantor.

M2 – Getallenverzamelingen

Getallenverzamelingen

Natuurlijke getallen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Gehele getallen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Rationale getallen

$$\left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

Tussen twee verschillende rationale getallen zal altijd een derde rationaal getal zitten:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \text{ met } x < y, \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y.$$

Reële getallen

Reële getallen = rationale getallen opvullen met de irrationale getallen

Reële rechte

We kunnen $\mathbb{R}$ identificeren met een rechte. Die identificatie wordt uniek vastgelegd eens we op die rechte twee punten gekozen hebben: een punt dat overeenkomt met het getal 0 en een ander punt dat correspondeert met het getal 1. Men noemt die rechte de **reële rechte**.



2.1.1 Propositie

Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$(1) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(2) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(3) \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$(4) \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

2.1.2 Propositie

Zij $a, b \in \mathbb{R}_0$ en $n, m \in \mathbb{Z}$. Dan geldt:

$$(1) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$(2) \quad a^{n+m} = a^n a^m.$$

$$(3) \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

$$(4) \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

2.1.5 Propositie

Zij $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$. Dan geldt:

$$(1) \quad a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

$$(2) \quad a^{p+q} = a^p a^q.$$

$$(3) \quad (a^p)^q = a^{pq}.$$

$$(4) \quad (ab)^q = a^q b^q.$$

2.1.6 Propositie

Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$. Er geldt:

(1) Als $a \leq b$ en $c \leq 0$, dan is $ac \geq bc$.

(2) Als $0 < a \leq b$, dan is $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

(3) Als $b \leq a < 0$, dan is $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

(4) Als $0 < a \leq b$ en $q \in \mathbb{Q}_0^+$, dan is $a^q \leq b^q$.

(5) Als $0 < a \leq b$ en $q \in \mathbb{Q}_0^-$, dan is $a^q \geq b^q$.

2.2.1 Definitie

Voor een reëel getal a definiëren we de **absolute waarde** als

$$|a| = \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0, \\ -a & \text{als } a < 0. \end{cases}$$

Uit de definitie volgt direct dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|a| \geq 0, \quad |a| = |-a| \quad \text{en} \quad -|a| \leq a \leq |a|.$$

2.2.2 Definitie

De **afstand** tussen x en y in $\mathbb{R}$ definiëren we als $|x - y|$.

2.2.3 Propositie (Driehoeksongelijkheid)

- (1) Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ is $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (2) Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ is $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

*Directe afstand van een punt x naar een punt y is korter dan de afstand van de 'omweg':
Eerst van x naar een z en dan van z naar y*

2.3.1 Definitie

Zij $A \subseteq \mathbb{R}$.

We noemen A **naar boven begrensd** als er een M in $\mathbb{R}$ bestaat zo dat $x \leq M$ voor alle $x \in A$.

We noemen A **naar onder begrensd** als er een m in $\mathbb{R}$ bestaat zo dat $m \leq x$ voor alle $x \in A$.

We noemen A kortweg **begrensd** als A zowel naar boven als naar onder begrensd is.

2.3.2 Definitie

Een **interval** in $\mathbb{R}$ is een niet-lege deelverzameling I van $\mathbb{R}$ waarvoor elk element van $\mathbb{R}$ dat tussen twee elementen van I ligt, tot I behoort, m.a.w. I is een interval als aan volgende eigenschap voldaan is: als $z \in \mathbb{R}$ en $x, y \in I$ zo dat $x \leq z \leq y$, dan moet $z \in I$.

Intervallen die (naar boven en naar onder) begrensd zijn:

- $[a, b]$
- $[a, b[$
- $]a, b]$
- $]a, b[$

2.3.3 Definitie

Zij A een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We noemen A **open** als A leeg is of als er rond elk punt $a \in A$ een open interval bestaat dat helemaal in A ligt, m.a.w. als er voor elke $a \in A$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat $]a - \delta, a + \delta[\subseteq A$.

We noemen A **gesloten** als $\mathbb{R} \setminus A$ open is.

Uit bovenstaande voorbeelden blijkt dat ‘open’ en ‘gesloten’ geen complementaire begrippen zijn: er zijn verzamelingen die noch open, noch gesloten zijn, en er bestaan verzamelingen die zowel open als gesloten zijn.

2.4.3 Propositie

Beschouw $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ en een $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$(1) \sum_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k.$$

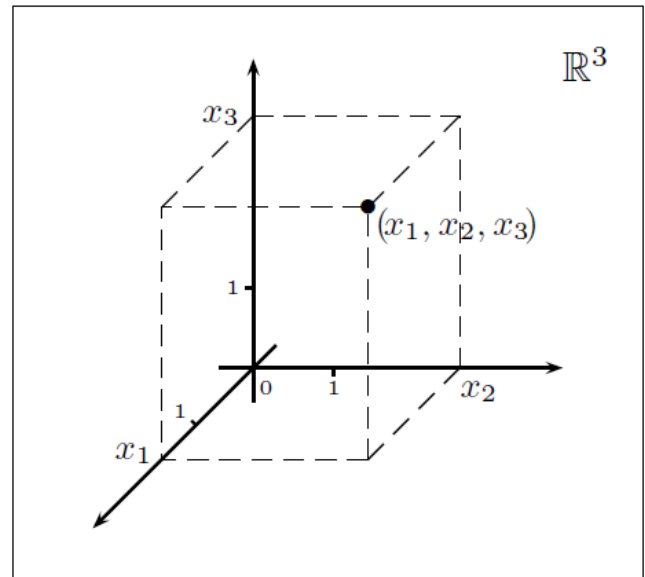
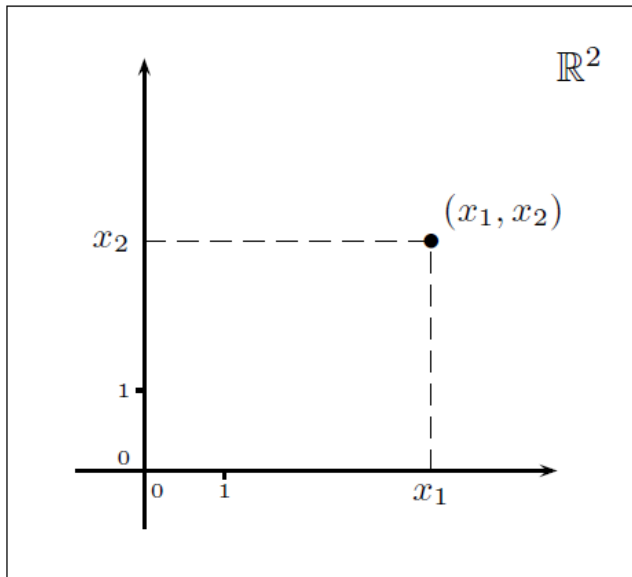
$$(2) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k.$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \lambda = \lambda n.$$

Bewijs door (volledige) inductie

- (1) $1 \in S$ (start),
m.a.w. (2.1) geldt voor $n = 1$.
- (2) Als $m \in S$ (inductiehypothese), dan is ook $(m + 1) \in S$ (inductiestap),
m.a.w. als (2.1) geldt voor m , dan geldt (2.1) ook voor $m + 1$.

Ruimte $\mathbb{R}^n$



In het algemeen kan $\mathbb{R}^n$ opgevat worden als een n -dimensionale ruimte maar voor $n > 3$ kunnen we moeilijk tekeningen maken en laat onze dagdagelijkse visuele intuïtie ons een beetje in de steek.

Algebraïsche structuur

We definiëren de **optelling** in $\mathbb{R}^n$ door

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

De **scalaire vermenigvuldiging** met een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ is gegeven door

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- (1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : x + (y + z) = (x + y) + z$
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x + 0 = 0 + x = x$ (waarbij $0 = (0, 0, \dots, 0)$)
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x + (-x) = 0 = (-x) + x$
- (4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : x + y = y + x$
- (5) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- (6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- (7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- (8) $\forall x \in \mathbb{R}^n : 1x = x$

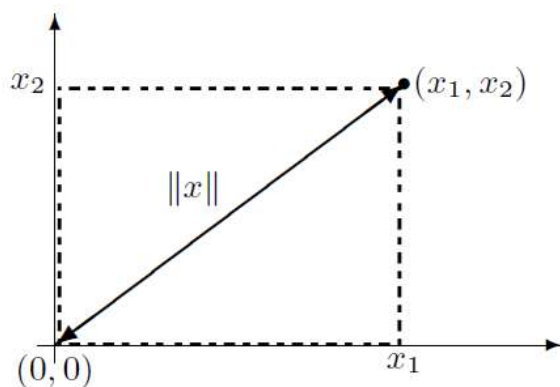
3.2.1 Definitie

Zij $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dan definiëren we

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

We noemen $\|x\|$ de **norm** van x . Indien $\|x\| = 1$, noemen we x **genormeerd** (of een **eenheidsvector**).

Merk op dat $\|x\| = |x|$ als $n = 1$. Voor $n = 2$ en $n = 3$ vinden we dat de norm $\|x\|$ correspondeert met wat we de gewone (euclidische) afstand van x tot 0 noemen.



3.2.2 Propositie

- (1) Als $\|x\| = 0$ voor een $x \in \mathbb{R}^n$, dan is $x = 0$.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (3) De norm voldoet aan de driehoeksongelijkheid, d.w.z.
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Merk nog op dat uit de driehoeksongelijkheid voor de norm volgt dat

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

3.2.3 Definitie

Zij $x, y \in \mathbb{R}^n$. De (euclidische) **afstand** tussen x en y wordt gedefinieerd als $\|x - y\| (= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2})$.

3.2.3 Definitie

Zij $x, y \in \mathbb{R}^n$. De (euclidische) **afstand** tussen x en y wordt gedefinieerd als $\|x - y\| (= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2})$.

Als $n = 1$, vinden we $\|x - y\| = |x - y|$. Voor $n = 2$ en $n = 3$ correspondeert deze notie van afstand met het gewone afstandsbegrip in het vlak en de ruimte.

3.2.4 Definitie

Zij $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. We definiëren het **inproduct** (of **scalair product**) van x met y door

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Een andere notatie voor het scalair product is $x \cdot y$. Merk op dat $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

3.2.5 Propositie

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is bilineair, d.w.z.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \\ \langle x, \lambda y + \mu z \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

(2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is symmetrisch, d.w.z. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is positief definit, d.w.z.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ en als } \langle x, x \rangle = 0, \text{ dan is } x = 0.$$

3.2.6 Cauchy¹³-Schwarz¹⁴-ongelijkheid

Voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ is

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

3.2.8 Definitie

Zij $x, y \in \mathbb{R}^n$. We noemen x en y **orthogonaal** (notatie: $x \perp y$) als $\langle x, y \rangle = 0$.

Topologische structuur

3.3.1 Definitie

Zij $x \in \mathbb{R}^n$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$. De **open bol** met middelpunt x en straal r wordt genoteerd en gedefinieerd door

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}.$$

Voor $n = 1$, dus in $\mathbb{R}$, is $B(x, r) =]x - r, x + r[$.

Voor $n = 2$, dus in $\mathbb{R}^2$, is $B(x, r)$ een cirkelschijf met middelpunt x en straal r zonder de “rand”.

Voor $n = 3$, dus in $\mathbb{R}^3$, is $B(x, r)$ een gewone bol met middelpunt x en straal r zonder de “rand”.

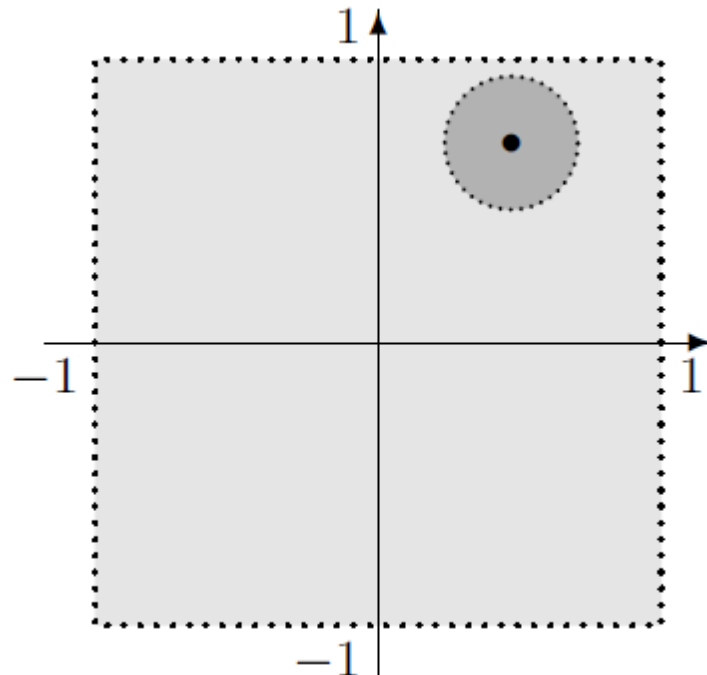
3.3.2 Definitie

Zij $A \subseteq \mathbb{R}^n$. We noemen A **open** als rond elk punt x van A een open bol bestaat met x als middelpunt die volledig in A ligt, dus als

$$\forall x \in A, \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq A.$$

We noemen A **gesloten** als $\mathbb{R}^n \setminus A$ open is.

Ruwweg kunnen we ons een open verzameling voorstellen als een verzameling die geen “rand” heeft; een gesloten verzameling kan wel een “rand” hebben.



Uit bovenstaande voorbeelden blijkt dat ‘open’ en ‘gesloten’ geen complementaire begrippen zijn: er zijn verzamelingen die noch open, noch gesloten zijn, en er bestaan verzamelingen die zowel open als gesloten zijn.

M3 – Functies en rijen

Functiebegrip

grootheid	hangt af van	grootheid
koers van een aandeel		tijd
vraag naar dvd-spelers		prijs van dvd-spelers én prijs van dvd-films
productie-output van een bedrijf		ingezette productiemiddelen
luchtdruk		hoogte boven aardoppervlak
positie van een raket in de ruimte		tijd verlopen sinds lancering
temperatuur op het aardoppervlak op een bepaald moment		plaats
aantal GSM-abonnees		tijd

f is een functie van A naar B
die x (uit A) afbeeldt op $f(x)$ (in B).

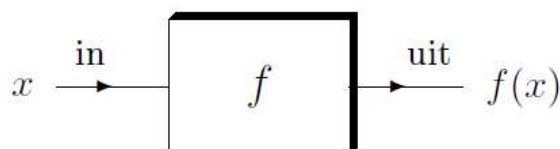
Kortweg noteert men een functie f van A naar B ook met $f : A \rightarrow B$. In verband met functies $f : A \rightarrow B$ hanteert men nog de volgende terminologie:

- De verzameling A wordt het **definitiegebied** of **domein** van de f genoemd (notatie: $\text{def}(f)$ of $\text{dom}(f)$).
- B is de **doelverzameling**,
- Als $x \in A$ en $y = f(x)$ dan noemt men y het **beeld** van x onder f , of (vermits B vaak een getallenverzameling is) de **functiewaarde** van x . Men leest “ $y = f(x)$ ” vaak als “ y is f van x ”. Het berekenen van de functiewaarde $f(x)$ noemt men ook vaak het “**evalueren** van f in x .”
- De verzameling $\{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$, m.a.w. de verzameling van alle functiewaarden van f , wordt de **beeldenverzameling** of kortweg het **beeld** van f genoemd en genoteerd met $f(A)$. Als $f(A) = B$, noemt men de functie **surjectief**.
- Als $A \subseteq \mathbb{R}$, zegt men dat f een functie van één (reële) variabele of veranderlijke is. Als $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (met $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$), zegt men dat f een functie van n (reële) veranderlijken of variabelen is.
- Als $B \subseteq \mathbb{R}$, noemt men f een **reële** (of **scalaire**) functie. Als $B \subseteq \mathbb{R}^m$ (met $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$), noemt men f een **vectorfunctie**.
- Met één vectorfunctie

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad (3.2)$$

komen m scalaire functies $f_i : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) overeen¹ die men de **componentsfuncties** of **coördinaatsfuncties** van f noemt. Omgekeerd definiëren m scalaire functies $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) via (3.2) één vectorfunctie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Een intuïtief uitstekende metafoor voor een functie $f : A \rightarrow B$ is die van een “*input-outputmachine*”.



Grafische voorstelling van functies

Grafiek van een functie

Grafiek van een functie: 1 x waarde mag slechts 1 y waarde hebben!!

Transformaties van grafieken

SPIEGELEN T.O.V.	... x-as	$y = -f(x)$
	... y-as	$y = f(-x)$
	... oorsprong	$y = -f(-x)$
VERSCHUIVEN NAAR	... links	$y = f(x + a)$
	... rechts	$y = f(x - a)$
VERSCHUIVEN NAAR	... omhoog	$y = f(x) + a$
	... omlaag	$y = f(x) - a$
TRANSFORMEREN T.O.V. X-AS	... inkrimpen	$y = \frac{1}{a} \cdot f(x)$
	... uitrekken	$y = a \cdot f(x)$
TRANSFORMEREN T.O.V. Y-AS	... inkrimpen	$y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$
	... uitrekken	$y = f(a \cdot x)$

Niveaulijnen van een functie in $\mathbb{R}^2$

Een andere mogelijkheid om een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ van twee variabelen te visualiseren wordt gegeven door de niveaulijnen. Voor elke $c \in \mathbb{R}$ definieert men de **niveaulijn** (of de **niveauverzameling**) $N_c \subseteq \mathbb{R}^2$ door

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

Operaties op functies

Samenstellen van functies

Zie oefeningen

Bewerkingen met functies

Beschouw functies $f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd op verzamelingen A_1 resp. A_2 . Beschouw ook een $\lambda \in \mathbb{R}$. We definiëren hiermee functies met waarden in $\mathbb{R}$ door

- $f + g$ door
$$\begin{cases} \text{def}(f + g) = A_1 \cap A_2 \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ voor } x \in \text{def}(f + g) \end{cases}$$
- λf door
$$\begin{cases} \text{def}(\lambda f) = A_1 \\ (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \text{ voor } x \in \text{def}(\lambda f) \end{cases}$$
- fg door
$$\begin{cases} \text{def}(fg) = A_1 \cap A_2 \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ voor } x \in \text{def}(fg) \end{cases}$$
- $\frac{f}{g}$ door
$$\begin{cases} \text{def}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in A_1 \cap A_2 \mid g(x) \neq 0\} \\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ voor } x \in \text{def}\left(\frac{f}{g}\right) \end{cases}$$

Inverteren van functies

3.3.2 Definitie

We noemen een functie $f : A \rightarrow B$ **injectief** als er voor elke $y \in B$ hoogstens één $x \in A$ bestaat waarvoor $f(x) = y$.

Surjectieve functies

⇒ *Injectief & surjectief zijn geen complementaire begrippen!*

Een functie is een bijectie als die functie zowel injectief en surjectief is!!

4.1.2 Definitie

Een **rij** in $\mathbb{R}$ is een functie $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto x_n$.

Men noteert de rij zelf vaak met $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Hoe kunnen we rijen vastleggen?

Soms hebben we een *expliciet functievoorschrift* voor een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.w.z. we hebben een expliciete formule die x_n uitdrukt in termen van n . Zo kunnen we de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van de oneven getallen beschrijven met

$$x_n = 2n + 1.$$

In heel wat toepassingen worden rijen gedefinieerd via *recursie*, d.w.z. er is een formule die (voor alle n) de $(n + 1)$ -ste term uitdrukt in functie van de n -de term (en eventueel ook de vorige termen). De rij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die het aantal bacteriën beschreef in het eerste inleidend voorbeeld op blz. 3.21, kunnen we bijvoorbeeld vastleggen via de recursieformule

$$b_{n+1} = 2b_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deze formule, samen met het gegeven dat $b_0 = 1$, legt de rij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ volledig vast.

4.4.1 Definitie

Een **rekenkundige** rij is een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ waarvoor er $a, v \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat $x_n = a + nv$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een rekenkundige rij kan ook eenvoudig via een recursie beschreven worden, namelijk

$$x_{n+1} = x_n + v \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N},$$

samen met de beginvoorwaarde $x_0 = a$. Elke term ontstaat dus uit de vorige door er een vast getal v bij op te tellen. Merk op dat de rij $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die het

4.4.2 Definitie

Een **meetkundige** rij is een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ waarvoor er $a, r \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat $x_n = ar^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een meetkundige rij kan ook eenvoudig via een recursie beschreven worden, namelijk

$$x_{n+1} = r x_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N},$$

samen met de beginvoorwaarde $x_0 = a$. Elke term ontstaat dus uit de vorige door die met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Merk op dat de rij

4.4.3 Propositie

De som s_N van de eerste $N+1$ termen van een meetkundige rij $(ar^n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $r \neq 1$ wordt gegeven door

$$s_N = a \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1}.$$

M4 – Lineaire functies, eerstegraadsfuncties

Matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

(2×3) matrix

... met a_2 is het $(1, 2)$ element

$(n \times m)$ matrix

- n rijen
- m kolommen

$(1 \times m)$ matrix = rijmatrix = matrix met slechts 1 rij

$(n \times 1)$ matrix = kolommatrix = matrix met slechts 1 kolom

MATRICES VERMENIGVULDIGEN:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \langle a, x \rangle.$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lineaire functies

1.2 Definitie

Een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ noemen we **lineair** als f voldoet aan

- (1) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is lineair als en slechts

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ en alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.5 Stelling

Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire functie. Dan bestaat er een $(m \times n)$ -matrix $(a_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ zo dat f gegeven wordt door (4.6).

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Eerstegraadsfuncties

2.1 Definitie

Een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ noemen we een **eerstegraadsfunctie** als de functie

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto \ell(x) = f(x) - f(0)$$

lineair is.

Merk op dat elke lineaire functie van de eerste graad is; het omgekeerd geldt niet: een eerstegraadsfunctie f zal slechts lineair zijn als $f(0) = 0$. Volgende propositie geeft expliciet de algemene vorm van een eerstegraadsfunctie.

2.2 Propositie

Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een eerstegraadsfunctie is. Dan bestaat er een $(m \times n)$ -matrix $(a_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ en een $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ zo dat voor alle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt dat

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Zie cursus p4.12

M5 – Lineaire stelsels

1.4 Definitie

Een **lineair stelsel** voor $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een stel van m vergelijkingen van de vorm

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.4)$$

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ = onbekenden van het stelsel
- $a_{i,j}$ = coëfficiënten van het stelsel
- b_i = rechterleden

Indien $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ noemt men het stelsel homogeen

Het stelsel (5.4) kan met behulp van matrices herschreven worden als

$$AX = B$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A wordt de **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel genoemd. Om de oplosbaarheid van het stelsel na te gaan en eventuele oplossingen van het stelsel te vinden zal het handig blijken A uit te breiden (te “randen”) met B . We noteren

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

en we noemen deze matrix de **gerande matrix** van het stelsel. Het is duidelijk dat een stelsel volledig beschreven wordt door zijn gerande matrix.

1.7.1 Propositie

Het aantal oplossingen van een homogeen stelsel is ofwel één ofwel oneindig.

1.7.2 Propositie

Het aantal oplossingen van een niet-homogeen stelsel is ofwel nul, ofwel één, ofwel oneindig.

- (1) Schrijf de gerande matrix van het stelsel.
- (2) Herleid de gerande matrix tot echelonvorm via elementaire rijoperaties.
- (3) Eens het stelsel in echelonvorm staat is de oplosbaarheid ervan direct af te lezen. Het stelsel zal strijdig zijn als de onderste niet-nul rij correspondeert met de vergelijking $0 = 1$. Als het stelsel oplosbaar is, is het snel op te lossen via achterwaartse substitutie.

2.2.1 Definitie

Een matrix staat in **echelonvorm** (of is een **echelonmatrix**) als hij de volgende eigenschappen heeft:

- de eventuele rijen met enkel nullen staan onderaan;
- in elke niet-nul rij is het leidende element gelijk aan 1;
- alle elementen onder elk van die leidende elementen 1, in de kolom waarin die leidende 1 staat zowel als in de kolommen links ervan, zijn nul.

Leidend element van een rij = eerste niet-nul element (van links te beginnen) in de rij

Oplossingverzameling van een stelsel verandert niet door op zijn gerande matrix rijoperaties uit te voeren

Elementaire rijoperaties kunnen zijn:

- Twee rijen omwisselen

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

- Een rij vermenigvuldigen/delen met een niet-nul getal

$$R_i \rightarrow \mu R_i$$

- Bij een rij een veelvoud optellen/afrekken van een andere rij

$$R_i \rightarrow R_i + \mu R_j$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 2 \\ 3x + y + 3z + 3t = 4 \end{cases}$$

We brengen de gerande matrix in echelonvorm.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

We vinden dus dat $y = -\frac{1}{2}$. Kies nu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, stel $z = \lambda$ en $t = \mu$, dan moet $x + y + z + t = 1$, dus $x = 1 - y - z - t = 1 + \frac{1}{2} - \lambda - \mu = \frac{3}{2} - \lambda - \mu$. De oplossingsverzameling is dus $\{(\frac{3}{2} - \lambda - \mu, -\frac{1}{2}, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = a^2 \end{cases} \quad (5.16)$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een parameter. We beginnen met een eerste elementaire rijoperatie om de gerande matrix in echelonvorm te brengen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & a^2 - a \end{array} \right)$$

Om verder te gaan moeten we onderscheid maken tussen de gevallen $1 - a^2 \neq 0$ en $1 - a^2 = 0$.

In het geval $1 - a^2 \neq 0$ passen we nu de rijtransformatie $R_2 \rightarrow \frac{1}{1-a^2}R_2$ toe. We vinden dan dat de gerande matrix rijequivalent is met de echelonmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a^2 - a}{1 - a^2} \end{array} \right).$$

De oplossing wordt dan als volgt gevonden

$$y = \frac{a^2 - a}{1 - a^2} = \frac{-a}{1 + a},$$

$$x = 1 - ay = 1 + \frac{a^2}{1 + a}.$$

Het geval $1 - a^2 = 0$ valt uiteen in twee subgevallen: $a = 1$ en $a = -1$.

Als $a = 1$ zien we dat de gerande matrix van (5.16) rijequivalent is met

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

In dat geval zijn er oneindig veel oplossingen, namelijk $(x, y) = (1 - \lambda, \lambda)$ met λ vrij te kiezen in $\mathbb{R}$.

Als $a = -1$ zien we dat de gerande matrix van (5.16) rijequivalent is met

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

en dit correspondeert met een strijdig stelsel.

Samenvattend, de oplossingsverzameling van (5.16) wordt gegeven door

- $\left\{ \left(1 + \frac{a^2}{1 + a}, \frac{-a}{1 + a} \right) \right\}$ als $a \neq 1$ en $a \neq -1$,
- $\{(1 - \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ als $a = 1$,
- $\emptyset$ als $a = -1$.

3.2 Definitie

Zij M een matrix. Veronderstel dat M via rijoperaties getransformeerd wordt naar een echelonmatrix M' . We definiëren de **rang** van M als het aantal niet-nul rijen in M' . We noteren dit aantal met $\text{rang}(M)$.

3.4 Stelling

Beschouw een oplosbaar stelsel $AX = B$ met n onbekenden. Het aantal vrijheidsgraden van dit stelsel is gelijk aan het aantal vrijheidsgraden van het geassocieerde homogene stelsel $AX = 0$. Bovendien is dit aantal gelijk aan $n - \text{rang}(A)$.

Aantal vrijheidsgraden = Aantal vrij te kiezen onbekenden

3.3 Stelling

Een stelsel $AX = B$ is oplosbaar als en slechts als $\text{rang}(A \mid B) = \text{rang}(A)$.

Indien $\text{rang}(A \mid B) \neq \text{rang}(A)$ dan is het stelsel simpelweg strijdig!

M6 – Matrixalgebra

Matrices

1.2 Definitie

Een $(m \times n)$ -**matrix** A is een rechthoekige tabel met reële getallen bestaande uit m rijen en n kolommen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

De $(n \times n)$ -**eenheidsmatrix**, genoteerd met I_n , is de vierkante matrix met n rijen en kolommen met overal nullen behalve op de diagonaal waar enen staan, m.a.w.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

De $(m \times n)$ -**nulmatrix**, genoteerd met $O_{m,n}$, is de $(m \times n)$ -matrix met m rijen en n kolommen waarvoor alle elementen nul zijn, m.a.w.

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Definitie

Beschouw twee $(m \times n)$ -matrices A en B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

We definiëren de **som** $A + B$ door

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Definitie

Beschouw een $(m \times n)$ -matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

en een $\lambda \in \mathbb{R}$. We definiëren de matrix λA door

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Zie reeds eerder gedefinieerd

2.1.5 Propositie

Zij $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

- (1) $A + (B + C) = (A + B) + C$*
- (2) $A + O_{m,n} = A = O_{m,n} + A$*
- (3) $A + (-A) = O_{m,n} = (-A) + A$*
- (4) $A + B = B + A$*
- (5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*
- (6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*
- (7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$*
- (8) $1A = A$*

2.2.3 Propositie

- (1) $A(BC) = (AB)C$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$*
- (2) $(A + B)C = AC + BC$ voor alle $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$*
- (3) $A(B + C) = AB + AC$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$*
- (4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
voor alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$*
- (5) $AO_{p,q} = O_{n,q}$ en $O_{m,n}A = O_{m,p}$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$*
- (6) $I_m A = A = A I_n$ voor alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*

2.3.1 Definitie

Beschouw een $(m \times n)$ -matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

De **getransponeerde** van A is de $(n \times m)$ -matrix A^t gegeven door

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Transponeren betekent dus dat we de rijen van de matrix als kolommen schrijven. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vierkante matrices die niet veranderen als je ze transposeert, krijgen een speciale naam.

2.3.2 Definitie

Een $(n \times n)$ -matrix $A = (a_{ij})$ noemen we **symmetrisch** als $A^t = A$, dus als $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle $i, j = 1, \dots, n$.

2.3.3 Propositie

Zij $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$(1) \quad (A^t)^t = A$$

$$(2) \quad (\lambda A)^t = \lambda(A^t)$$

$$(3) \quad (A + A')^t = A^t + A'^t$$

$$(4) \quad (AB)^t = B^t A^t$$

- Vermenigvuldiging in $\mathbb{R}^{n \times n}$ is niet commutatief!!

Inverteerbare matrices

3.2 Propositie

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Veronderstel dat er een $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat waarvoor $AB = I_n$. Dan is A inverteerbaar. Bovendien is die B dan de inverse van A .

3.4 Propositie

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dan is A inverteerbaar als en slechts als $\text{rang}(A) = n$.

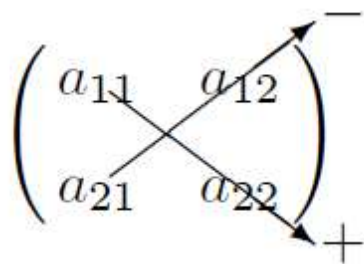
M7 – Determinanten

Definitie en begrip

1.1.1 Definitie

Voor een (2×2) -matrix definiëren we de **determinant** door

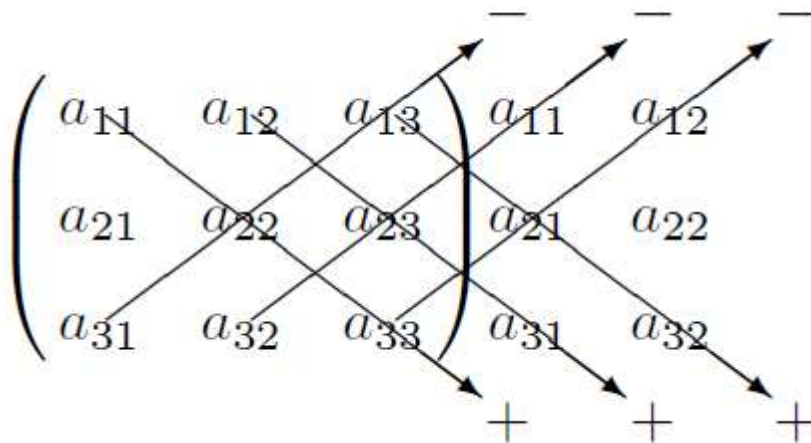
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$



1.1.2 Definitie

Voor een (3×3) -matrix definiëren we de **determinant** door

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32}.$$



(Regel van Sarrus)

Determinant van een matrix kunnen we ook vinden door te ontwikkelen naar een rij of een kolom:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

= ontwikkelen naar de eerste rij

(Analoog voor ontwikkelen naar eerste/n-de kolom of rij)

Rekenregels voor determinanten

Volgende rekenregels gelden voor determinanten:

- Twee rijen (of kolommen) omwisselen zorgt ervoor dat de determinant van teken verandert

$$R_i \leftrightarrow R_j \implies -\det(A)$$

- Een rij (of kolom) vermenigvuldigen/delen met een niet-nul getal zorgt ervoor dat de determinant met hetzelfde niet-nul getal wordt vermenigvuldigd

$$R_i \rightarrow \mu \cdot R_i \implies \mu \cdot \det(A)$$

- Bij een rij (of kolom) een veelvoud optellen/afrekken van een andere rij (of kolom) verandert de determinant niet

$$R_i \rightarrow \mu \cdot R_i \implies \mu \cdot \det(A)$$

$$\det(A^t) = \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Matrix met twee gelijke rijen (of kolommen) heeft als determinant nul

- als in een matrix A een rij (of kolom) de som is van twee rijen (of kolommen), dan is de determinant van A de som van twee determinanten, nl. de determinanten van de matrices die men verkrijgt door de betrokken rij (of kolom) van A te vervangen door haar samenstellende rijen (of kolommen).

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} + c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} + c_{33} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.6.1 Definitie

Voor een (2×2) -matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definiëren we de **adjunct** (of **toegevoegde** matrix) door

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Voor een (3×3) -matrix A definiëren we de **adjunct** of **toegevoegde** matrix door

$\text{adj}(A)$ = de getransponeerde matrix van de matrix
met de cofactoren van A als elementen

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

met C_{ij} = de (i, j) -cofactor van A .

2.6.2 Stelling

Zij A een $(n \times n)$ -matrix met $n = 2, 3$.

(1) A is inverteerbaar als en slechts als $\det(A) \neq 0$.

(2) Als A inverteerbaar is, dan is $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

M8 – Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie en begrippen

1.2 Definitie

We noemen een $(m \times m)$ -matrix A **diagonaliseerbaar** als er een inverteerbare $(m \times m)$ -matrix Q bestaat en een $(m \times m)$ -diagonaalmatrix D zo dat $A = QDQ^{-1}$.

1.3 Definitie

Zij A een (willekeurige) $(m \times m)$ -matrix over $\mathbb{R}$. We noemen een $\lambda \in \mathbb{R}$ een **eigenwaarde** van A indien er een $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ bestaat met $(x_1, \dots, x_m) \neq (0, \dots, 0)$ zo dat

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

De vector $(x_1, \dots, x_m)$ noemt men dan een **eigenvector** van A (behorende bij de eigenwaarde λ).

Berekenen van eigenwaarden en eigenvectoren

2.2 Propositie

Zij A een $(m \times m)$ -matrix (met $m = 2, 3$). Dan is λ een eigenwaarde van A als en slechts als $\det(A - \lambda I_m) = 0$.

M9 – Elementaire meetkunde

Meetkunde in het vlak ($\mathbb{R}^2$)

Voorstelling van rechten in het vlak

Vectorvergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^2$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in het vlak:

We nemen 1 punt als steunvector (v_1) en als richtingsvector nemen we dan: $v_2 - v_1$

$$v = v_1 + \lambda(v_2 - v_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

... met:

- $v_1 = (x_1, y_1)$
- $v_2 = (x_2, y_2)$

Parametervergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^2$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in het vlak:

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{voor een } \lambda \in \mathbb{R}.$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2)$

Cartesiaanse vergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^2$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in het vlak:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$ax + by = c$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2)$

Meetkunde in de ruimte ($\mathbb{R}^3$)

Voorstelling van rechten in de ruimte

Vectorvergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^3$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in de ruimte:

We nemen 1 punt als steunvector (v_1) en als richtingsvector nemen we dan: $v_2 - v_1$

$$v = v_1 + \lambda(v_2 - v_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

... met:

- $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Parametervergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^3$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in de ruimte:

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases} \quad \text{voor een } \lambda \in \mathbb{R}.$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Cartesiaanse vergelijking van een rechte in $\mathbb{R}^3$

Rechte gedefinieerd door 2 verschillende punten in de ruimte:

$$\begin{cases} (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \\ (y - y_1)(z_2 - z_1) = (z - z_1)(y_2 - y_1) \end{cases}$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Voorstelling van vlakken in de ruimte

Vectorvergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$

Vlak gedefinieerd door 3 verschillende niet-collineaire punten in de ruimte:

We nemen 1 punt als steunvector (v_1) en als richtingsvector nemen we dan: $v_2 - v_1$ en $v_3 - v_1$

$$v = v_1 + \lambda(v_2 - v_1) + \mu(v_3 - v_1), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

... met:

- $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
- $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Parametervergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$

Vlak gedefinieerd door 3 verschillende niet-collineaire punten in de ruimte:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$
- $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Cartesiaanse vergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$

Vlak gedefinieerd door 3 verschillende niet-collineaire punten in de ruimte:

$$ax + by + cz = d,$$

... met:

- $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$
- $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Onderlinge stand van rechten

Evenwijdige rechten

Twee rechten zijn evenwijdig indien hun richtingscoëfficiënten veelvoudig zijn van elkaar

In $\mathbb{R}^2$ geldt: Twee rechten zijn evenwijdig indien hun cartesiaanse vergelijkingen zich als volgt verhouden:

$$ax + by = c$$

$$ax + by = d$$

Als $c = d$, dan vallen de rechten samen

In $\mathbb{R}^3$ geldt: Twee rechten zijn evenwijdig indien hun cartesiaanse vergelijkingen zich als volgt verhouden:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$a_1x + b_1y = d_1$$

$$a_2x + b_2y = d_2$$

Als $c_1 = d_1$ en $c_2 = d_2$, dan vallen de rechten samen

Snijdende rechten

Twee rechten zijn snijdend indien ze juist één punt gemeenschappelijk hebben

M10 – Limieten van rijen

Basisbegrippen & inleiding

We willen het asymptotisch gedrag of het limietgedrag van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrijven, d.w.z. we willen beschrijven hoe x_n zich gedraagt als n “zeer groot” wordt.

Het asymptotisch gedrag (of “lange termijn gedrag”) van een rij kan zeer uiteenlopend zijn:

- (a) De termen x_n kunnen “streven naar” een bepaalde waarde $a \in \mathbb{R}$. (zie voorbeelden 1.1.1 en 1.1.2)
- (b) De termen x_n kunnen naar “plus of min oneindig gaan”. (zie voorbeelden 1.1.3 en 1.1.4)
- (c) De termen x_n kunnen schommelen (zie voorbeeld 1.1.5 of zelfs een grillig gedrag vertonen waardoor de rij “geen limiet” zal hebben.

Rijen met een eindige limiet

1.2.2 Definitie

We zeggen dat een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **convergeert** naar een $a \in \mathbb{R}$ als en slechts als we $|x_n - a|$ willekeurig klein kunnen maken door n voldoende groot te nemen,

of, met andere woorden, als en slechts als we voor elke keuze van $\varepsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zo dat $|x_n - a| < \varepsilon$ voor alle indices n die groter zijn dan n_0 ,

of, in symbolen, als en slechts als

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

We noemen a de **limiet** van de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notatie: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ of ook $x_n \rightarrow a$.

Een rij die convergeert naar een $a \in \mathbb{R}$ noemen we een **convergente** rij.

Merk op dat eisen dat

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

equivalent is met

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

en dus equivalent met

$$x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Met dit in het achterhoofd, kunnen we de definitie van convergentie van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar een $a \in \mathbb{R}$ ook equivalent formuleren in termen van de grafiek van de rij:

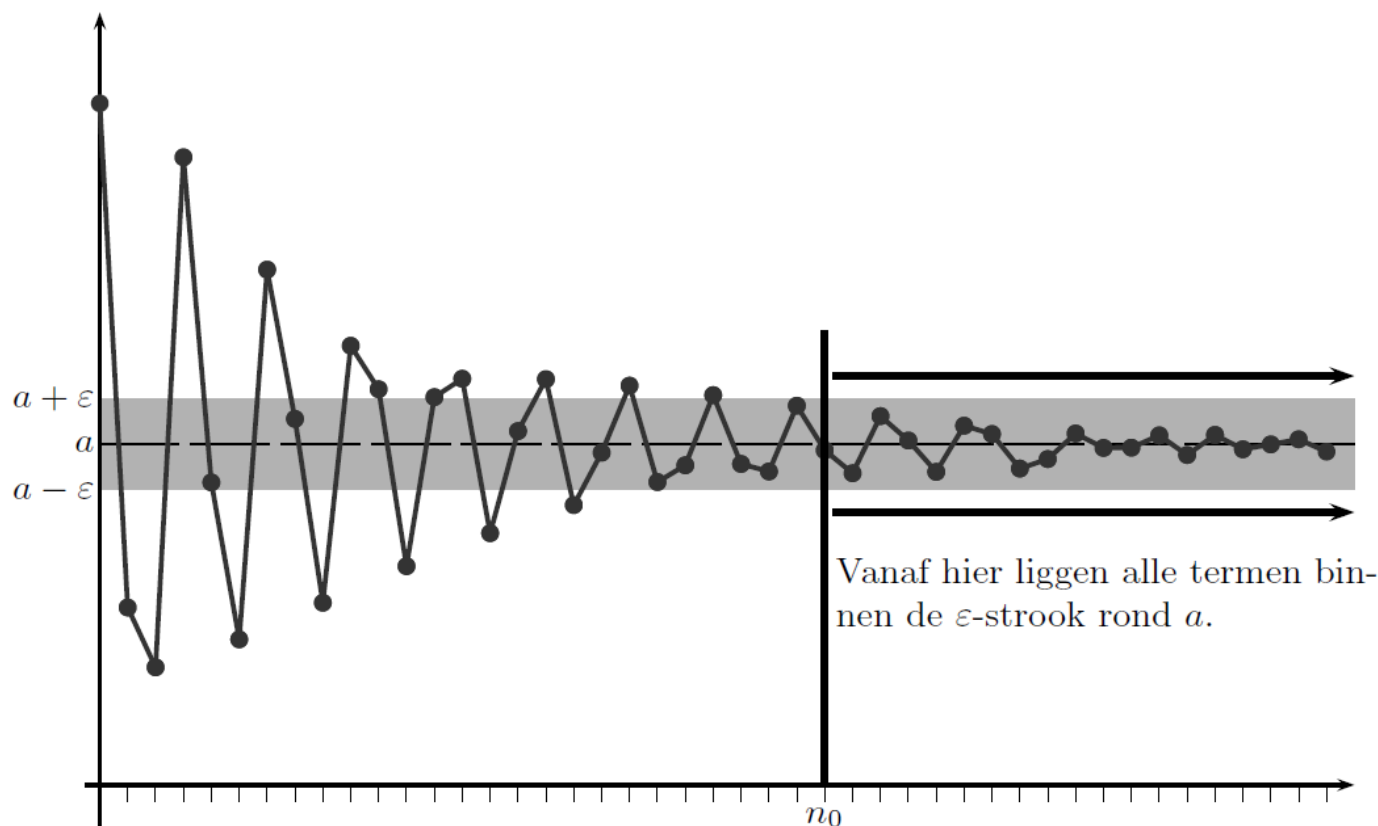
Een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar een $a \in \mathbb{R}$

als en slechts als

we voor elke keuze van $\varepsilon > 0$, hoe klein ook,
altijd een $n_0 \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zo dat

de grafiek van de rij vanaf de index n_0 helemaal gelegen is binnen
de horizontale strook tussen $a - \varepsilon$ en $a + \varepsilon$.

Deze formulering van convergentie laat zich gemakkelijk tekenen. Onderstaande tekening illustreert ook dat n_0 afhankelijk is van de keuze van ε . Hoe kleiner je ε kiest, hoe groter je n_0 zal moeten nemen.



1.3.2 Definitie

We zeggen dat een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **naar plus oneindig gaat**

als en slechts als

we x_n willekeurig groot kunnen maken door n voldoende groot te nemen,

of, met andere woorden, als en slechts als

we voor elke keuze van $M \in \mathbb{R}$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zo dat $x_n > M$ voor alle indices n die groter zijn dan n_0 ,

of, in symbolen, als en slechts als

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

We zeggen dan dat plus oneindig de **limiet** is van de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

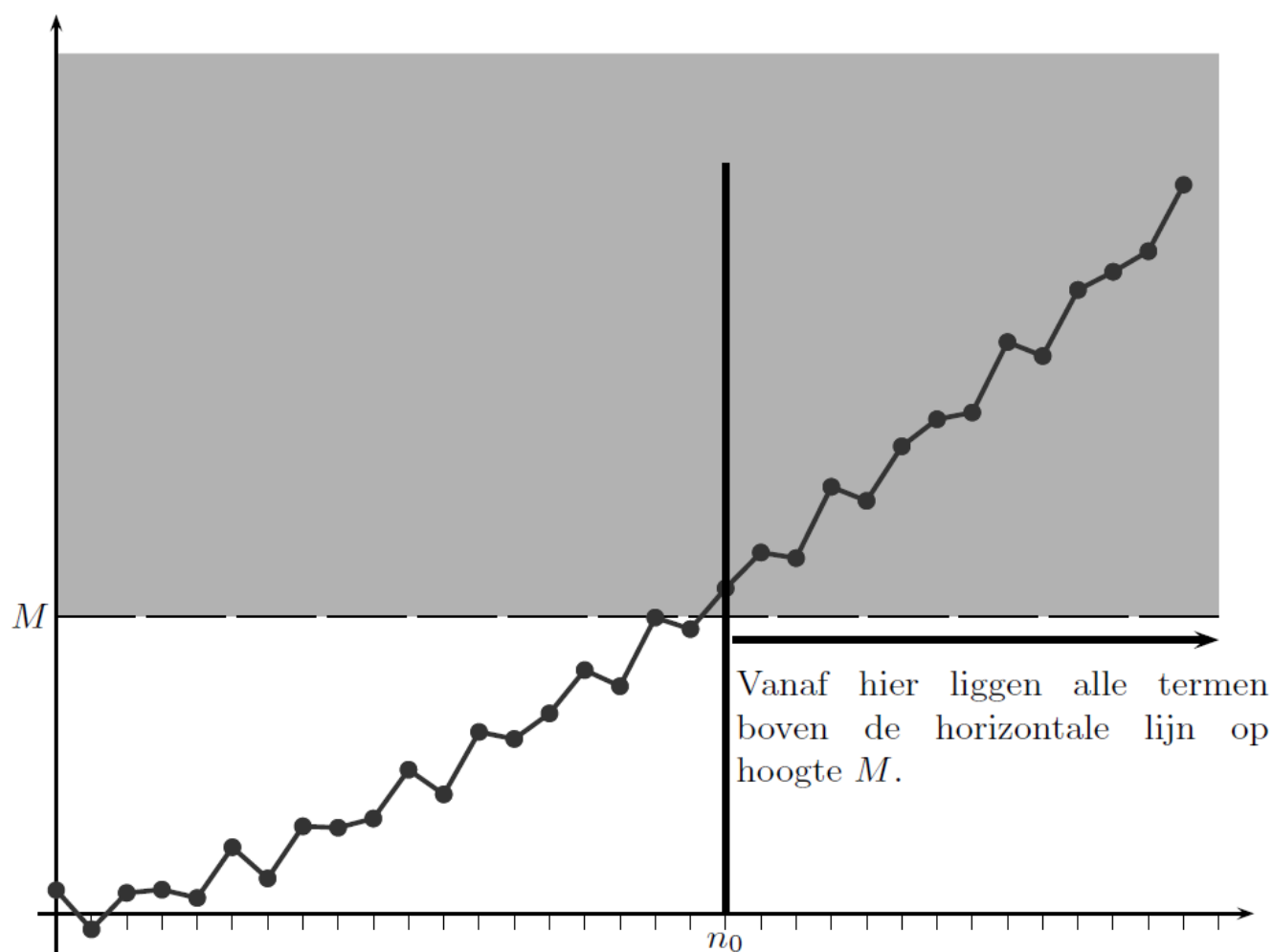
Notatie: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ of ook $x_n \rightarrow +\infty$.

Het is niet moeilijk in te zien dat we de definitie van het naar plus oneindig gaan van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ook equivalent kunnen formuleren in termen van de grafiek van de rij:

Een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gaat naar plus oneindig

als en slechts als

we voor elke keuze van $M \in \mathbb{R}$, hoe groot ook,
altijd een $n_0 \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zo dat
de grafiek van de rij vanaf de index n_0 helemaal gelegen is
boven de horizontale lijn op hoogte M .



Deze tekening illustreert ook dat n_0 afhankelijk is van de keuze van M . Hoe groter je M kiest, hoe groter je n_0 zal moeten nemen.

1.4.1 Propositie

Zij $p \in \mathbb{R}$. De rij $(n^p)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heeft een limiet. Bovendien geldt:

(1) Als $p > 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty$.

(2) Als $p = 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = 1$.

(3) Als $p < 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = 0$.

1.4.2 Propositie

Zij $r \in \mathbb{R}$ en beschouw de rij $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dan geldt:

(1) Als $r > 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$.

(2) Als $r = 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$.

(3) Als $-1 < r < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

(4) Als $r \leq -1$, dan heeft de rij $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ geen limiet.

1.5.1 Propositie

Als een rij een limiet heeft, dan is die limiet uniek.

1.5.2 Propositie

Een convergente rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dus een rij met een eindige limiet) is begrensdd, d.w.z. er bestaan een $m, M \in \mathbb{R}$ zo dat $m \leq x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

1.5.3 Propositie

Voor elk reëel getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat er een rij $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ die convergeert naar x .

2.1.1 Definitie

We noemen een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- **stijgend** als $x_{n+1} \geq x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **strikt stijgend** als $x_{n+1} > x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **dalend** als $x_{n+1} \leq x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **strikt dalend** als $x_{n+1} < x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Stelling

Beschouw een stijgende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Dan heeft deze rij altijd een limiet. Bovendien is deze limiet eindig als en slechts als de rij naar boven begrensd is (d.w.z. als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$).

2.2.1 Propositie

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat beide rijen een limiet hebben en dat $x_n \leq y_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan zal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2.2.2 Insluitingsstelling

Beschouw drie rijen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{voor alle } n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de “middelste” rij, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, een limiet en bovendien is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Rekenregels van limieten van rijen

Rekenen met rijen

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Bij wijze van voorbeeld kunnen we denken aan

$$x_n = 2n + 1, \quad \text{dus de rij: } (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$$

en

$$y_n = 3(n + 1), \quad \text{dus de rij: } (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots)$$

- We definiëren de **som** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n + y_n)$. In het voorbeeld is de somrij

$$x_n + y_n = 2n + 1 + 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 + 3, 3 + 6, 5 + 9, 7 + 12, 9 + 15, 11 + 18, 13 + 21, \dots)$$

- We definiëren het **verschil** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n - y_n)$. In het voorbeeld is de verschilrij

$$x_n - y_n = 2n + 1 - 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 - 3, 3 - 6, 5 - 9, 7 - 12, 9 - 15, 11 - 18, 13 - 21, \dots)$$

- We definiëren het **product** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n y_n)$. In het voorbeeld is de productrij

$$x_n y_n = (2n + 1) 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 \times 3, 3 \times 6, 5 \times 9, 7 \times 12, 9 \times 15, 11 \times 18, 13 \times 21, \dots)$$

- We definiëren het **quotiënt** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen (x_n / y_n) . In het voorbeeld is de quotiëntrij

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{2n + 1}{3(n + 1)},$$

$$\text{dus de rij: } \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{9}{15}, \frac{11}{18}, \frac{13}{21}, \dots \right)$$

- Tenslotte definiëren we het **product** van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met een reëel getal $\lambda \in \mathbb{R}$ als de rij met termen (λx_n) . In het voorbeeld en voor $\lambda = 5$ vinden we zo de rij

$$5x_n = 5(2n + 1),$$

dus de rij: $(5 \times 1, 5 \times 3, 5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 9, 5 \times 11, 5 \times 13, \dots)$

Rekenen met rijen met (eindige & oneindige) limieten

3.3.5 Stelling

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en een reëel getal $\lambda \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat beide rijen een limiet hebben. Dan gelden volgende uitspraken tenminste als het rechterlid in de bijbehorende rekenregel “gedecodeerd” kan worden met de “codes” vermeld in Stelling 3.3.4 (d.w.z. als het geen onbepaalde vorm is):

(1) De rij $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) De rij $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(3) De rij $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(4) De rij $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(5) Als $y_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (behalve eventueel een eindig aantal) en als $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ dan heeft de rij $(x_n/y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Onbepaalde vormen

- Voor de som: $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$.
- Voor het verschil: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.
- Voor het product: $0 \times (+\infty)$, $(+\infty) \times 0$,
 $0 \times (-\infty)$, $(-\infty) \times 0$.
- Voor het quotiënt: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

3.4.1 Propositie

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet heeft (eventueel $\pm\infty$) en noteer die limiet met a . Veronderstel dat de rij $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar 0 convergeert. Dan geldt:

- (1) Als $a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ en als $y_n > 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

- (2) Als $a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ en als $y_n < 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

- (3) Als $a \in \mathbb{R}_0^- \cup \{-\infty\}$ en als $y_n > 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

- (4) Als $a \in \mathbb{R}_0^- \cup \{-\infty\}$ en als $y_n < 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

In het geval $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
kunnen we in het algemeen niets besluiten
over het bestaan noch over de eventuele waarde van
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n)$!

$$(n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= (+\infty) \times 1 = +\infty.\end{aligned}$$