

M10 – Limieten van rijen

Inleiding

We willen het asymptotisch gedrag of het limietgedrag van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrijven, d.w.z. we willen beschrijven hoe x_n zich gedraagt als n ‘zeer groot’ wordt.

Het asymptotisch gedrag (of “lange termijngedrag”) van een rij kan zeer uiteenlopend zijn:

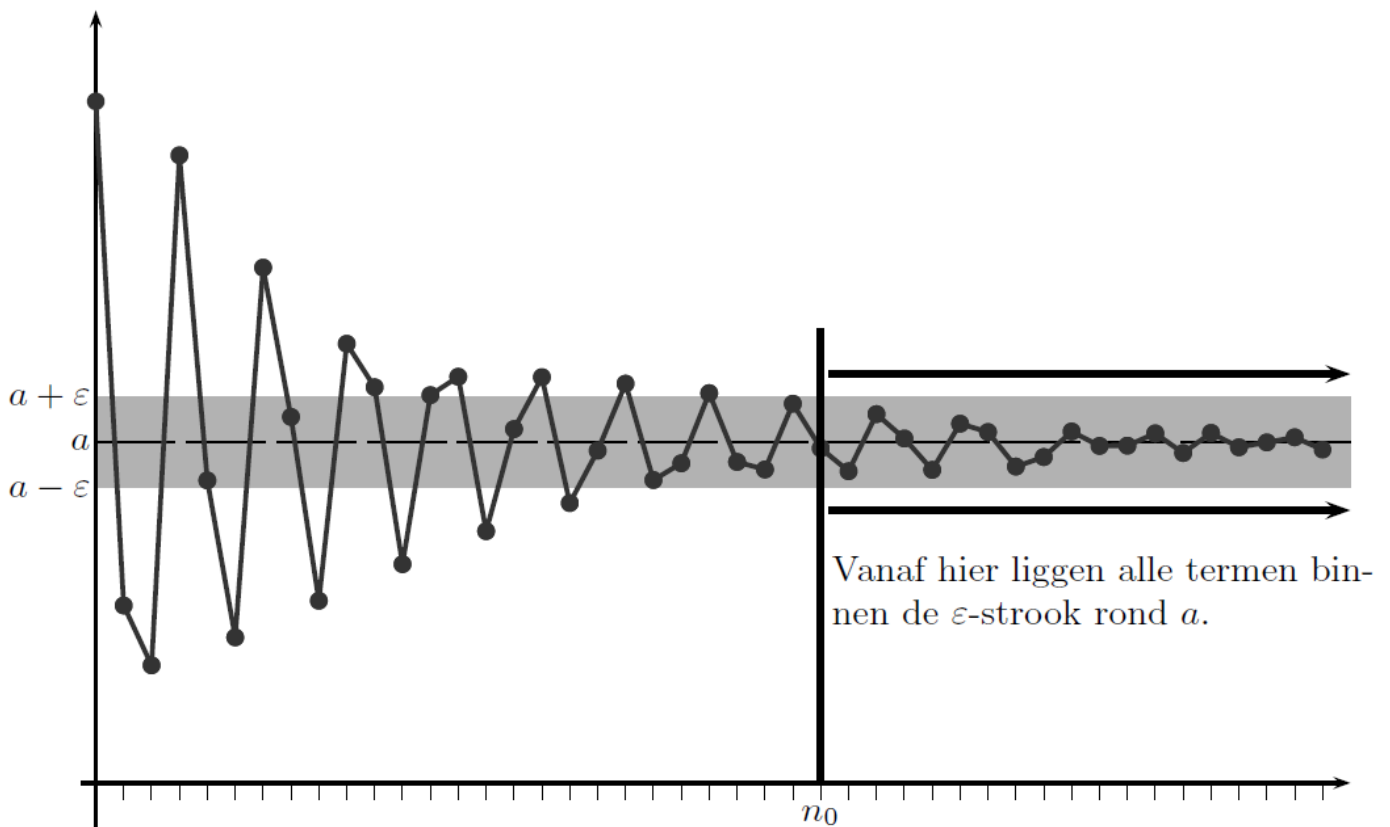
- (a) De termen x_n kunnen “streven naar” een bepaalde waarde $a \in \mathbb{R}$. (zie voorbeelden 1.1.1 en 1.1.2)
- (b) De termen x_n kunnen naar “plus of min oneindig gaan”. (zie voorbeelden 1.1.3 en 1.1.4)
- (c) De termen x_n kunnen schommelen (zie voorbeeld 1.1.5 of zelfs een grillig gedrag vertonen waardoor de rij “geen limiet” zal hebben.

1.2.2 Definitie

We zeggen dat een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **convergeert** naar een $a \in \mathbb{R}$ of, in symbolen, als en slechts als

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

- We noemen a de limiet van de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Keuze van n_0 is afhankelijk van de keuze van ε

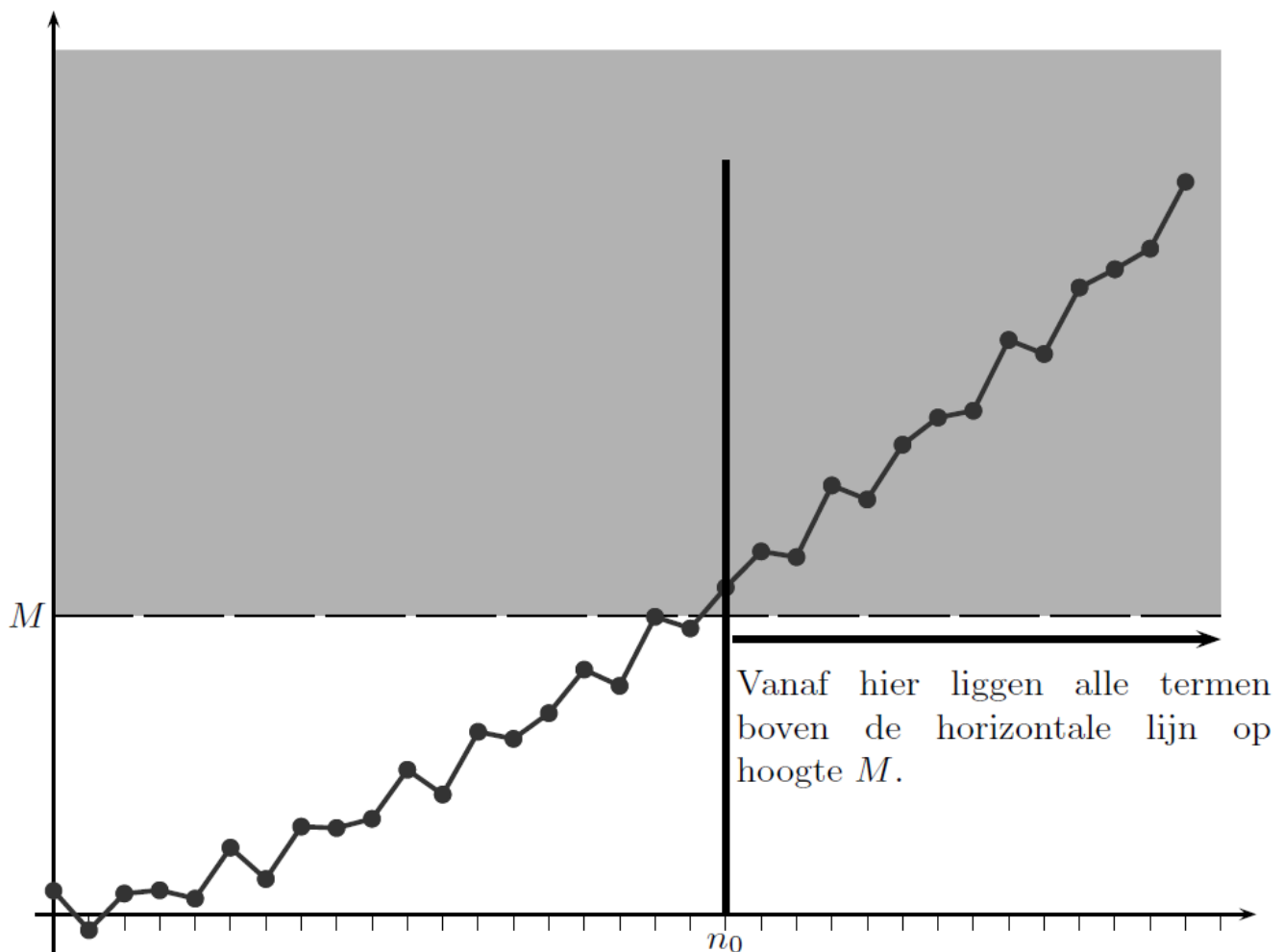


1.3.2 Definitie

We zeggen dat een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **naar plus oneindig gaat** of, in symbolen, als en slechts als

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

- We noemen plus oneindig de limiet van de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Keuze van n_0 is afhankelijk van de keuze van M



1.5.1 Propositie

Als een rij een limiet heeft, dan is die limiet uniek.

1.5.3 Propositie

Voor elk reëel getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat er een rij $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ die convergeert naar x .

1.5.2 Propositie

Een convergente rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dus een rij met een eindige limiet) is begrensd, d.w.z. er bestaan een $m, M \in \mathbb{R}$ zo dat $m \leq x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Omgekeerde is niet noodzakelijkerwijs waar!!

2.1.1 Definitie

We noemen een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- **stijgend** als $x_{n+1} \geq x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **strikt stijgend** als $x_{n+1} > x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **dalend** als $x_{n+1} \leq x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- **strikt dalend** als $x_{n+1} < x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Elke stijgende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet; bovendien is deze ...

- ... **eindig** a.s.a. deze rij naar boven begrensd is
- ... **oneindig** a.s.a. deze rij niet naar boven begrensd is

Elke dalende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet; bovendien is deze ...

- ... **eindig** a.s.a. deze rij naar onder begrensd is
- ... **oneindig** a.s.a. deze rij niet naar onder begrensd is

2.2.1 Propositie

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat beide rijen een limiet hebben en dat $x_n \leq y_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan zal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

“Nemen van de limiet bewaart de orde tussen rijen”

2.2.2 Insluitingsstelling

Beschouw drie rijen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{voor alle } n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de “middelste” rij, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, een limiet en bovendien is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Insluitingsstelling voornamelijk gebruiken bij alternerende rijen!!

Insluitingsstelling = Sandwich stelling = Sandwich theorema

Rekenregels van rijen

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Bij wijze van voorbeeld kunnen we denken aan

$$x_n = 2n + 1, \quad \text{dus de rij: } (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$$

en

$$y_n = 3(n + 1), \quad \text{dus de rij: } (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots)$$

- We definiëren de **som** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n + y_n)$. In het voorbeeld is de somrij

$$x_n + y_n = 2n + 1 + 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 + 3, 3 + 6, 5 + 9, 7 + 12, 9 + 15, 11 + 18, 13 + 21, \dots)$$

- We definiëren het **verschil** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n - y_n)$. In het voorbeeld is de verschilrij

$$x_n - y_n = 2n + 1 - 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 - 3, 3 - 6, 5 - 9, 7 - 12, 9 - 15, 11 - 18, 13 - 21, \dots)$$

- We definiëren het **product** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen $(x_n y_n)$. In het voorbeeld is de productrij

$$x_n y_n = (2n + 1) 3(n + 1),$$

$$\text{dus de rij: } (1 \times 3, 3 \times 6, 5 \times 9, 7 \times 12, 9 \times 15, 11 \times 18, 13 \times 21, \dots)$$

- We definiëren het **quotiënt** van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij met termen (x_n / y_n) . In het voorbeeld is de quotiëntrij

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{2n + 1}{3(n + 1)},$$

$$\text{dus de rij: } \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{9}{15}, \frac{11}{18}, \frac{13}{21}, \dots \right)$$

• Tenslotte definiëren we het **product** van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met een reëel **getal** $\lambda \in \mathbb{R}$ als de rij met termen (λx_n) . In het voorbeeld en voor $\lambda = 5$ vinden we zo de rij

$$5x_n = 5(2n + 1),$$

dus de rij: $(5 \times 1, 5 \times 3, 5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 9, 5 \times 11, 5 \times 13, \dots)$

3.3.5 Stelling

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en een reëel getal $\lambda \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat beide rijen een limiet hebben. Dan gelden volgende uitspraken tenminste als het rechterlid in de bijbehorende rekenregel “gedecodeerd” kan worden met de “codes” vermeld in Stelling 3.3.4 (d.w.z. als het geen onbepaalde vorm is):

(1) De rij $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) De rij $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(3) De rij $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(4) De rij $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(5) Als $y_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (behalve eventueel een eindig aantal) en als $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ dan heeft de rij $(x_n/y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

OPGELET 1: ONBEPAAALDE VORMEN VOOR RIJEN:

Onbepaalde vormen

- Voor de som: $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$.
- Voor het verschil: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.
- Voor het product: $0 \times (+\infty)$, $(+\infty) \times 0$,
 $0 \times (-\infty)$, $(-\infty) \times 0$.
- Voor het quotiënt: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

3.4.1 Propositie

Beschouw twee rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veronderstel dat de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet heeft (eventueel $\pm\infty$) en noteer die limiet met a . Veronderstel dat de rij $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar 0 convergeert. Dan geldt:

- (1) Als $a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ en als $y_n > 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

- (2) Als $a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ en als $y_n < 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

- (3) Als $a \in \mathbb{R}_0^- \cup \{-\infty\}$ en als $y_n > 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

- (4) Als $a \in \mathbb{R}_0^- \cup \{-\infty\}$ en als $y_n < 0$ voor alle behalve eventueel een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

5.2 Definitie

We zeggen dat een rij $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ **convergeert** naar een $a \in \mathbb{R}^n$ als

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon.$$

5.4 Propositie

Beschouw een rij $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ en een $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Noteer de componentrijen met $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ (met $i = 1, 2, \dots, n$).

Volgende uitspraken zijn equivalent:

- (1) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert naar a .
- (2) Voor alle $i = 1, 2, \dots, n$ convergeert $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ naar a_i .

Normale rekenregels van limieten blijven gelden!!

M11 – Belangrijke functies

Exponentiële en logaritmische functies

Exponentiële functies

Zij $a \in \mathbb{R}_0^+$. Dan geldt: $a^x \stackrel{\text{notatie}}{=} \exp_a x$

1.3.2 Propositie

Zij $a \in \mathbb{R}_0^+$. Dan geldt:

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x a^y = a^{x+y}.$
- $\forall x \in \mathbb{R} : a^x > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R} : a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$
- $a^0 = 1.$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : (a^x)^y = a^{xy}.$
- *Als $a > 1$, is $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : a^x > 1.$*
- *Als $a < 1$, is $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : a^x < 1.$*

1.2.3 Propositie

Als $a > 1$, is $\exp_a$ strikt stijgend, d.w.z. als $r < s$, dan is $a^r < a^s$.

Als $a < 1$, is $\exp_a$ strikt dalend, d.w.z. als $r < s$, dan is $a^r > a^s$.

$$\text{Zij } a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}. \quad \log_a x = y \iff a^y = x.$$

1.4.2 Propositie

Zij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Dan geldt:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$, in het bijzonder is $\log_a 1 = 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall s \in \mathbb{R} : \log_a(x^s) = s \log_a x.$
- Als $a > 1$, is $\log_a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ strikt stijgend.
- Als $a < 1$, is $\log_a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ strikt dalend.

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

EXTRA: BRIGGSE logaritme

$$\log_{10}(x) = \log(x) = y$$

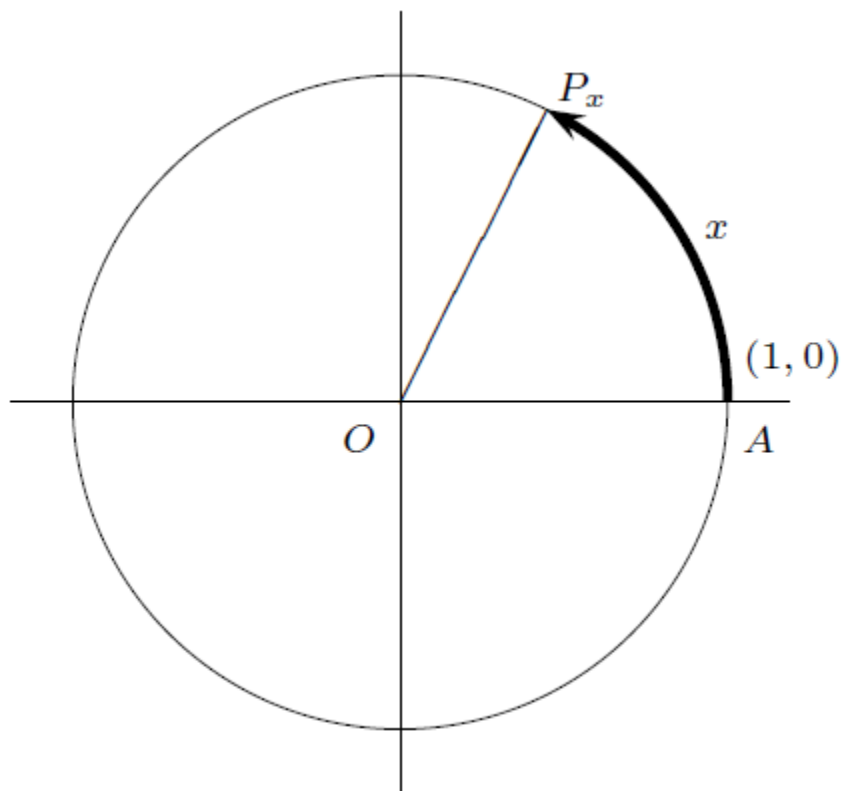
EXTRA: NATUURLIJKE logaritme

$$\log_e(x) = \ln(x) = y$$

Verband tussen exponentiële en logaritmische functies

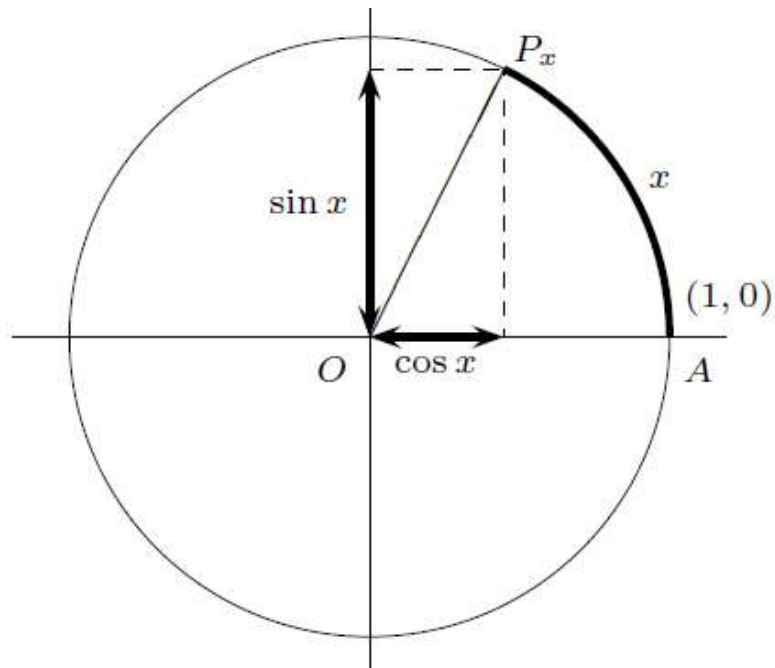
$$\log_a(a^y) = a^{\log_a(y)} = y$$

Beschouw de cirkel in $\mathbb{R}^2$ met middelpunt $(0,0)$ en straal 1.

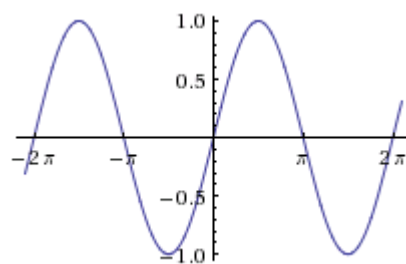


$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$$

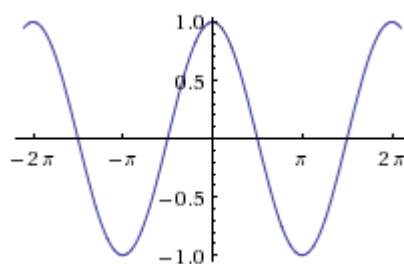
$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$$



Sinusfunctie



Cosinusfunctie



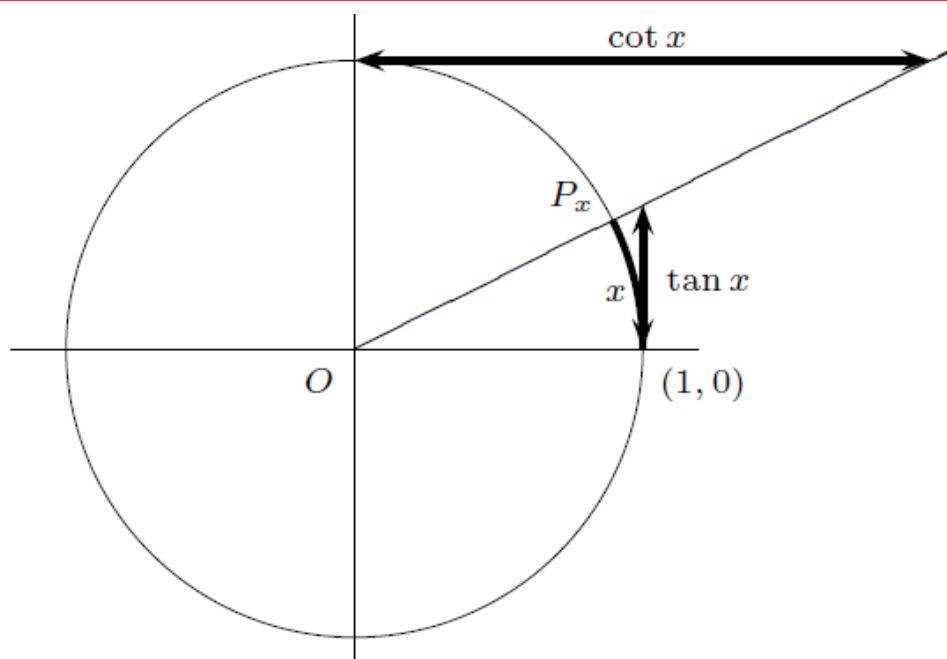
Tangens- & cotangensfunctie

Algebraïsch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

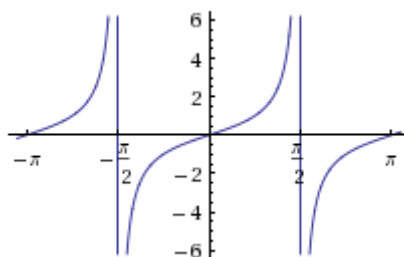
$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Grafisch op de goniometrische cirkel

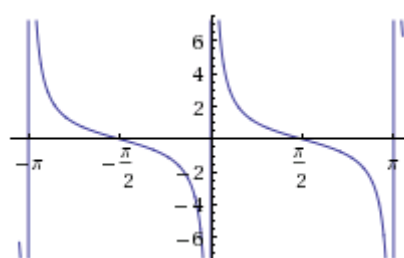


Grafisch in het assenstelsel

Tangensfunctie



Cotangensfunctie



Sinus, cosinus, tangens & cotangens van enkele speciale hoeken

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\cot x$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	—	0

Intermezzo: Transformaties van grafieken

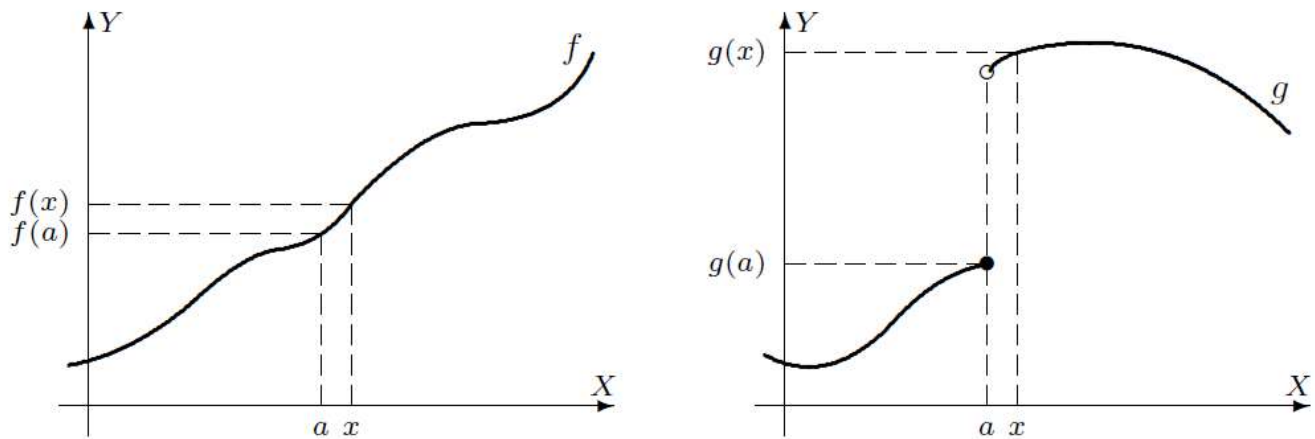
SPIEGELEN T.O.V.	... x-as	$y = -f(x)$
	... y-as	$y = f(-x)$
	... oorsprong	$y = -f(-x)$
VERSCHUIVEN NAAR	... links	$y = f(x + a)$
	... rechts	$y = f(x - a)$
VERSCHUIVEN NAAR	... omhoog	$y = f(x) + a$
	... omlaag	$y = f(x) - a$
TRANSFORMEREN T.O.V. X-AS	... inkrimpen	$y = \frac{1}{a} \cdot f(x)$
	... uitrekken	$y = a \cdot f(x)$
TRANSFORMEREN T.O.V. Y-AS	... inkrimpen	$y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$
	... uitrekken	$y = f(a \cdot x)$

M12 – Continuïteit en limieten van functies

Continuïteit van functies

Definitie van continue functies

Beschouw twee functies $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvan de grafieken er als volgt uitzien.



1.1.2 Definitie

Een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ noemen we **continu in een** $a \in A$ als voor *elke* rij $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A die naar a convergeert geldt dat $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ naar $f(a)$ convergeert. We noemen f **continu (op A)** als f continu is in elke $a \in A$.

1.2.1 Propositie

Een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is continu in $a \in A$ als en slechts als de componentfuncties $f_1, f_2, \dots, f_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in a .

1.2.2 Propositie

Beschouw functies $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ en $a \in A$. Veronderstel dat f en g continu zijn in a . Dan is

- (1) $\lambda f : A \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto \lambda f(x)$ continu in a .*
- (2) $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto f(x) + g(x)$ continu in a .*
- (3) Als $m = 1$, dan is $fg : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)g(x)$ continu in a .⁴*
- (4) Als $m = 1$ en als $g(a) \neq 0$, dan is $\frac{f}{g}$ continu in a .*

1.2.3 Propositie

Beschouw functies $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ en $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$. Veronderstel dat f continu is in een punt $a \in A$ en dat g continu is in $f(a)$. Dan is $g \circ f$ continu in a .

1.2.7 Stelling

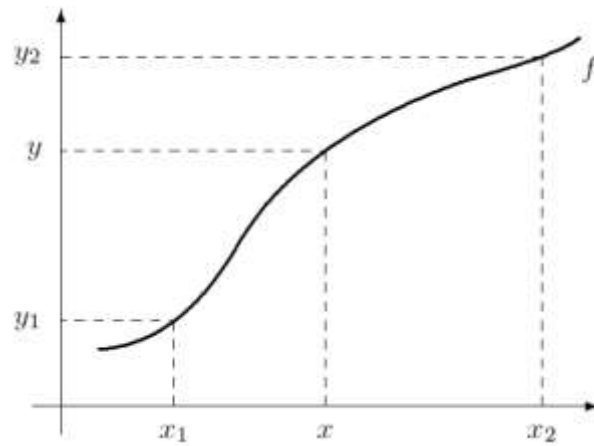
Zij A een gesloten begrensde deel van $\mathbb{R}^n$ en zij $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Dan is f begrensd (d.w.z. er bestaan $m, M \in \mathbb{R}$ zo dat $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in A$). Bovendien bestaan er $x_0, x_1 \in A$ zo dat

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{voor alle } x \in A.$$

Met andere woorden, f bereikt in A een minimale en een maximale functiewaarde.

1.2.4 Tussenwaardestelling

Zij $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie op een interval I . Zij $x_1, x_2 \in I$ en stel $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. Dan zal er voor elke y tussen y_1 en y_2 een x tussen x_1 en x_2 bestaan waarvoor $f(x) = y$.



2.1.3 Definitie

Zij $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}^n$. We zeggen dat een $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de **limiet** is van f in a als voor elke rij $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A die naar a convergeert en waarvoor $x_k \neq a$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, geldt dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L.$$

We noteren dit door $\lim_a f = L$ of $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

!

2.2.1 Propositie

Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en een $a \in A$. Dan zijn volgende uitspraken equivalent:

- (1) f is continu in a .
- (2) $\lim_a f = f(a)$.

2.2.2 Propositie

Beschouw $A \subseteq \mathbb{R}^n$ en $a \in A$. Zij $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ functies die gedefinieerd zijn op resp. $A \setminus \{a\}$ en A en die samenvallen op $A \setminus \{a\}$. Als $\lim_a g$ bestaat, dan bestaat ook $\lim_a f$ en beide limieten zijn gelijk.

... Eigenschappen van limieten gezien in module 10 blijven geldig ...

2.2.6 Propositie

Beschouw functies $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ en $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ en een punt a waar het zinvol is de limiet van f te berekenen. Veronderstel dat $\lim_a f$ bestaat (in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) en noem die limiet b .

- (1) Indien $b \in B$ en g continu is in b , dan bestaat $\lim_a g \circ f$ en

$$\lim_a g \circ f = g(\lim_a f) = g(b).$$

- (2) Indien b niet tot B behoort en het zinvol is de limiet van g in b te berekenen en $\lim_b g$ bestaat (in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$), dan bestaat $\lim_a g \circ f$ en

$$\lim_a g \circ f = \lim_b g.$$

M13 – Afgeleiden voor functies van één veranderlijke

Definitie van de afgeleide

1.2 Definitie

Beschouw een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op een open interval I en een $x \in I$. We zeggen dat f **afleidbaar** is in x als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ bestaat en eindig is.} \quad (13.1)$$

Als de limiet in (13.1) bestaat en eindig is, noemen we hem de **afgeleide** van f in x ; we noteren die limiet dan met $f'(x)$.

We noemen f afleidbaar (over I) als f afleidbaar is in elke $x \in I$. In dit geval wordt de **afgeleide functie** f' gedefinieerd door

$$f' : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x).$$

¹Als een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ afleidbaar is, kan f in de omgeving van een punt $a \in A$ zeer goed benaderd worden door de formule $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Dit is de eerste orde benadering van f in a .

Betekenis van de afgeleide

x	$f(x)$	$f'(x)$
plaats	hoogte	helling
tijd	afgelegde weg	snelheid
tijd	snelheid	versnelling
kwantiteit	totale kost	marginale kost
kwantiteit	totale opbrengst	marginale opbrengst

2.1 Propositie

Beschouw een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op een open interval I en een $a \in I$. Indien f afleidbaar is in a , dan is f continu in a .

2.2 Propositie

Beschouw functies $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd op een open interval. Zij $x \in I$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat f en g afleidbaar zijn in x . Dan geldt:

- (1) λf is afleidbaar in x en $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*
- (2) $f + g$ is afleidbaar in x en $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
- (3) fg is afleidbaar in x en $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.*
- (4) Als $g(x) \neq 0$, dan is $\frac{1}{g}$ is afleidbaar in x en*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

- (5) Als $g(x) \neq 0$, dan is $\frac{f}{g}$ is afleidbaar in x en*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

2.3 Kettingregel

Beschouw een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ gedefinieerd op een open interval I en met waarden in een open interval J . Beschouw ook een functie $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zij $x \in I$ en veronderstel dat f afleidbaar is in x en dat g afleidbaar is in $f(x)$. Dan is $g \circ f$ afleidbaar in x en

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

2.4 Propositie

Zij $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ een bijectie tussen open intervallen I en J . Zij $x \in I$ en veronderstel dat f afleidbaar is in x en dat $f'(x) \neq 0$. Dan is de inverse functie $f^{-1} : J \rightarrow I$ afleidbaar in $f(x)$ en

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (13.5)$$

3.1.2 Propositie

Veronderstel dat $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie is op een open interval I . Als f stijgt (resp. daalt) over I , dan is $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) voor alle $x \in I$.

3.4.1 Propositie

Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die afleidbaar is in $]a, b[$. Als $f'(c) = 0$ voor alle $c \in]a, b[$, dan is f constant.

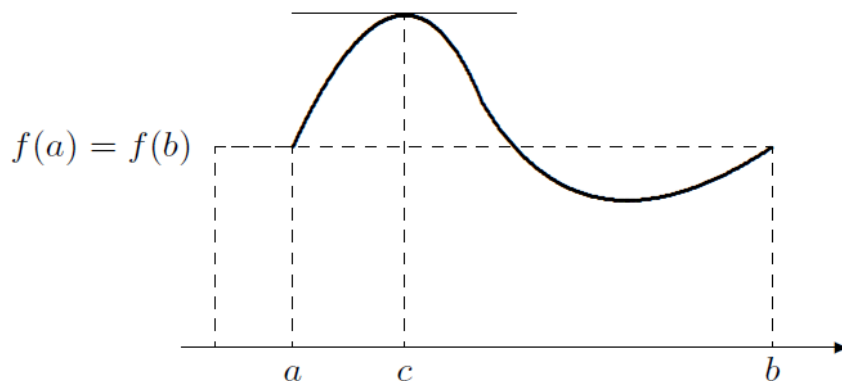
3.4.2 Propositie

Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die afleidbaar is in $]a, b[$.

- (1) Als $f'(c) \geq 0$ voor alle $c \in]a, b[$, dan is f stijgend in $[a, b]$, d.w.z. als $x, y \in [a, b]$ en $x \leq y$, dan is $f(x) \leq f(y)$.*
- (2) Als $f'(c) \leq 0$ voor alle $c \in]a, b[$, dan is f dalend in $[a, b]$, d.w.z. als $x, y \in [a, b]$ en $x \leq y$, dan is $f(x) \geq f(y)$.*

3.2 Middelwaardestelling van Rolle²

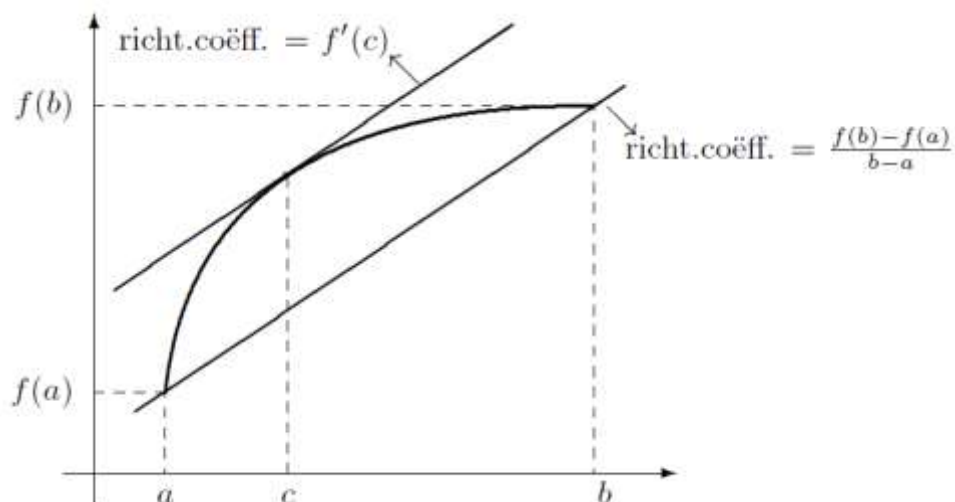
Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie op een begrensd gesloten interval $[a, b]$. Veronderstel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en dat $f(a) = f(b)$. Dan bestaat er een $c \in]a, b[$ zo dat $f'(c) = 0$.



3.3 Middelwaardestelling van Lagrange⁵

Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie op een begrensd gesloten interval $[a, b]$ die afleidbaar is in $]a, b[$. Dan bestaat er een $c \in]a, b[$ zo dat

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Definitie

5.1.1 Definitie

Zij $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie. Indien de afgeleide functie $f' : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op haar beurt afleidbaar is, zeggen we dat f **twee maal afleidbaar** is over I . Men noemt dan de functie $(f')'$ de **tweede (orde) afgeleide** van f .

Notatie: $(f')' = f''$.

n^{de} -orde benadering

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \quad (13.10)$$

5.2.4 Middelwaardestelling van Taylor¹⁰

Beschouw een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op een open interval I die $(n+1)$ maal afleidbaar is. Zij $a \in I$ en noteer met $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de n -de orde benadering van f rond a gegeven door (13.10).

Voor elke $x \in I$ bestaat er een c tussen a en x zo dat

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (13.12)$$

Indien $x \neq a$, dan kunnen we zo'n c vinden die strikt tussen a en x ligt.

5.2.5 Propositie

Beschouw een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op een open interval I die $(n + 1)$ maal afleidbaar is. Veronderstel dat $f^{(n+1)}$ begrensd is op I , d.w.z. dat er $M \in \mathbb{R}^+$ bestaat zo dat $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ voor alle $t \in I$. Zij $a \in I$ en noteer met $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de n -de orde benadering van f rond a gegeven door (13.10). Dan zal

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{|x - a|^n} = 0.$$

Regel van l'Hôpital

6.2 Propositie

Beschouw afleidbare functies $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op een open interval I en een ophopingspunt $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ van I . Veronderstel dat $\lim_a f = \lim_a g = 0$ of dat $\lim_a f = \pm\infty$ en $\lim_a g = \pm\infty$.

Als $\lim_a \frac{f'}{g'}$ bestaat (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), dan bestaat ook $\lim_a \frac{f}{g}$ en

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}.$$