

Lineaire Optimilizatie

Extra sessie

19 augustus 2010

De leerstof

- Handboek: hoofdstuk 2 t.e.m. 8 (incl. errata)
- Slides (zie toledo)
- Extra opgaven (zie toledo)
- Computersessie: Lindo syntax en output

Wat niet? Excel

Het examen

- Het cijfer is gebaseerd op een schriftelijk, individueel examen (gesloten boek) waarmee maximaal 20 punten verdiend kunnen worden.
- Rekenmachine is niet toegelaten.
- Idem voor tweede zit.
- Er is geen individuele opdracht; de extra opgaven tellen niet mee voor het examen.
- Je krijgt de volgende formules op het examen:
$$z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N$$
$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} A_N x_N$$

Het examen

- Nadruk op oefeningen en inzicht
- De examenvragen...
 - Formuleer een model
 - Los op met de simplexmethode
 - Gevoeligheidsanalyse
 - ...
- Geen letterlijke reproductie van bewijzen uit de cursus; eventueel wel bewijzen van een nieuwe stelling

Opgave 1

- Het bedrijf “Kees!” brengt drie soorten parfum op de markt: X, Y, en Z. Om deze parfums te kunnen maken, gebruikt het bedrijf een grondstof die het onbeperkt kan aankopen aan 5 €/liter. Elke liter aangekochte grondstof kan gebruikt worden voor de productie van stoffen A en B, die als tussenproduct dienen voor het maken van de parfums.
- Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.
- Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Het kost 1 € om dit proces uit te voeren. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Proces 2 kost 7 € om uit te voeren.

Opgave 1

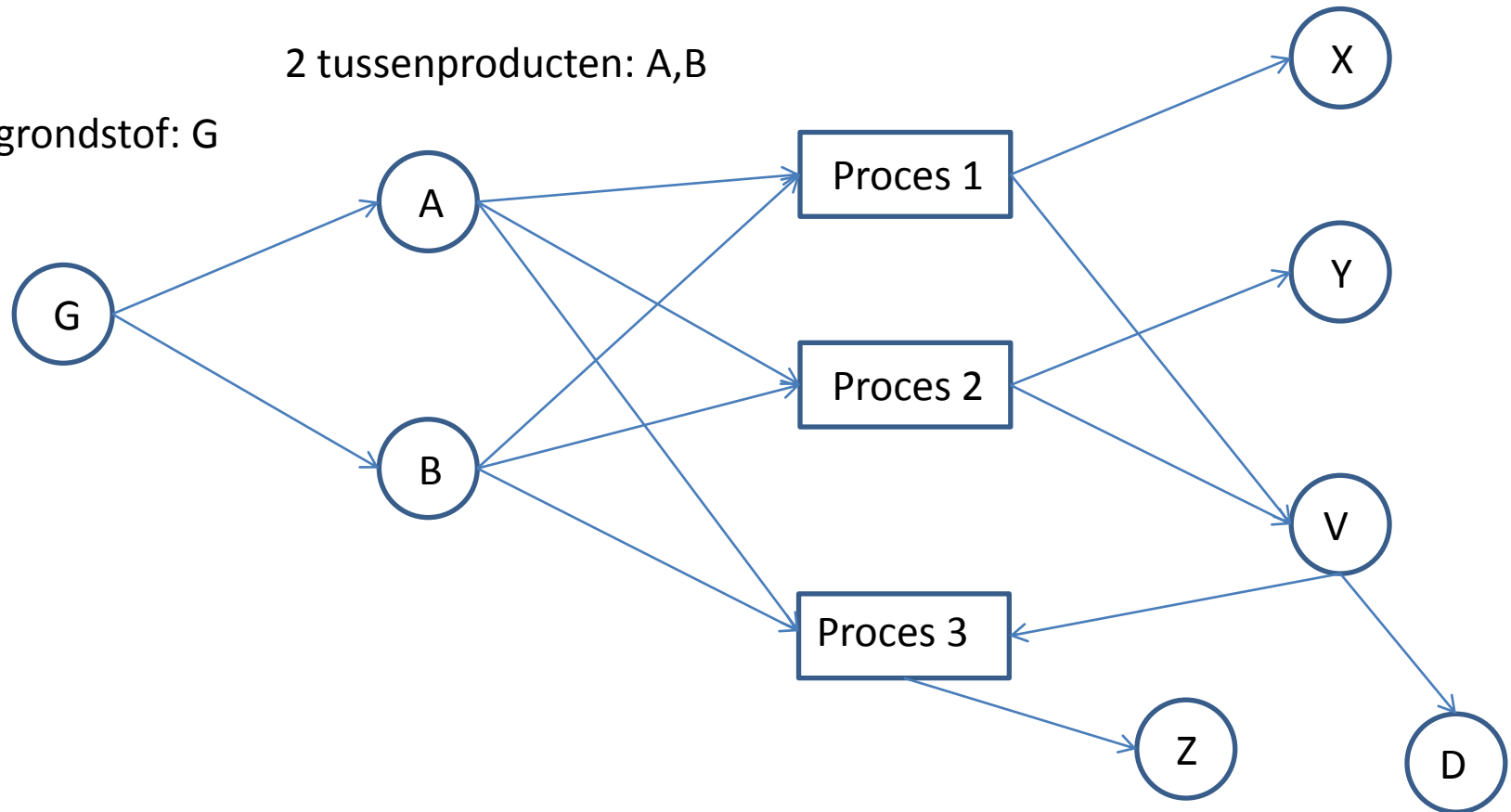
- “Kees!” kan gratis vloeibaar afval dumpen in de Zenne of het afval gebruiken om parfum Z te maken. De overheid legt beperkingen op en laat slechts toe 100 liter vloeibaar afval te dumpen per week. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt. Bovendien kost dit productieproces 5€.
- Wekelijks kan maximaal 500 liter X en 500 liter Y worden verkocht. De wekelijkse vraag naar parfum Z daarentegen is onbegrensd. Producten X en Y verkopen tegen respectievelijk 18€ en 23€ per 100 ml.; 100 ml. van parfum Z kan verkocht worden tegen 16€. Wekelijks zijn 6000 uren verwerkingstijd beschikbaar.
- Formuleer een LO model dat de wekelijkse winst voor “Kees!” maximaliseert.

Schematische weergave

3 parfums: X,Y,Z
Vloeibaar afval: V
Gedumpt afval: D

2 tussenproducten: A,B

1 grondstof: G



Keuze variabelen

X,Y,Z: hoeveelheid (in 100ml) geproduceerd van parfum X,Y,Z

A,B: hoeveelheid (in 100ml) geproduceerd van tussenproduct A,B

G: hoeveelheid (in liter) geproduceerd van grondstof G

V: hoeveelheid (in 100ml) geproduceerd vloeibaar afval

D: hoeveelheid (in 100ml) gedumpt vloeibaar afval

Andere keuzes zijn ook mogelijk:

- Andere eenheden
- Enkel variabelen voor X,Y,Z (geproduceerd hoeveh. van parfum X,Y,Z)
- Variabelen voor processen
- ...

Beperkingen

Verband tussen grondstof en tussenproducten:

“Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.”

1 liter G $\rightarrow$ 200 ml. A

1 liter G $\rightarrow$ 300 ml. B

~~Of dus (met G in liter en A, B in 100ml):~~

~~G = 2 A~~

Fout !!

Een liter G levert 200ml A, niet 50ml.

Vul concrete getallen in: voor G=1 (1 liter) wordt A=0.5 (50ml)

Beperkingen

Verband tussen grondstof en tussenproducten:

“Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.”

1 liter G $\rightarrow$ 200 ml. A

1 liter G $\rightarrow$ 300 ml. B

~~Of dus (met G in liter en A, B in 100ml):~~

~~2 G = A~~

~~3 G = B~~

Fout !!

Een liter G levert 200ml. A **OF** 300 ml. B, niet **EN**.

Vul concrete getallen in: voor G=1 wordt A=2 EN B=3.

Met deze beperkingen levert 1 liter grondstof dus 200ml. A EN 300 ml. B op.

Beperkingen

Verband tussen grondstof en tussenproducten:

“Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.”

1 liter G $\rightarrow$ 200 ml. A

1 liter G $\rightarrow$ 300 ml. B

Of dus (met G in liter en A, B in 100ml):

$$G = \frac{1}{2} A + \frac{1}{3} B$$

Inderdaad, een liter G levert nu 200ml. A **OF** 300 ml. B

Vul concrete getallen in: voor G=1 wordt A=2 of B=3.

Of nog: 200 ml A (A=2) én 300 ml B (B=3) vereist nu 2 liter G ($G = 1+1$).

Beperkingen

Verband tussen tussenproducten en parfums:

“Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt.”

200 ml A + 100 ml B → 100 ml X + 100 ml V

[Proces 1]

100 ml A + 200 ml B → 100 ml Y + 80 ml V

[Proces 2]

50 ml A + 200 ml B + 120 ml V → 100 ml Z

[Proces 3]

~~Of dus (met A, B, X, Y, Z, V in 100ml):~~

~~$1/2 A + B = X + V$~~

[Proces 1]

Fout !!

Deze beperking zegt helemaal niets over de verhoudingen tussen A, B, X en V.

Vul concrete getallen in: A=0, B=1, X=1, V=0 voldoet aan de beperking.

Maar dit betekent dat we toelaten dat 100ml B wordt omgezet in 100ml X...

Beperkingen

Verband tussen tussenproducten en parfums:

“Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt.”

200 ml A + 100 ml B $\rightarrow$ 100 ml X + 100 ml V [Proces 1]

100 ml A + 200 ml B $\rightarrow$ 100 ml Y + 80 ml V [Proces 2]

50 ml A + 200 ml B + 120 ml V $\rightarrow$ 100 ml Z [Proces 3]

Essentie: er moet genoeg A geproduceerd zijn (via G) om te kunnen gebruiken voor de parfums

Geproduceerde hoeveelheid A?

= A (zie definitie A, verband met G)

Verbruikte hoeveelheid A?

= 2 X + Y + $\frac{1}{2}$ Z (zie processen 1, 2, 3)

Of dus: verbruikte hoeveelheid A $\leq$ geproduceerde hoeveelheid A (met A, B, X, Y, Z, V in 100ml):

$$2X + Y + \frac{1}{2}Z \leq A$$

Beperkingen

Verband tussen tussenproducten en parfums:

“Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt.”

$200 \text{ ml A} + 100 \text{ ml B} \rightarrow 100 \text{ ml X} + 100 \text{ ml V}$ [Proces 1]

$100 \text{ ml A} + 200 \text{ ml B} \rightarrow 100 \text{ ml Y} + 80 \text{ ml V}$ [Proces 2]

$50 \text{ ml A} + 200 \text{ ml B} + 120 \text{ ml V} \rightarrow 100 \text{ ml Z}$ [Proces 3]

Essentie: er moet genoeg B geproduceerd zijn (via G) om te kunnen gebruiken voor de parfums

Geproduceerde hoeveelheid B?

= B (zie definitie B, verband met G)

Verbruikte hoeveelheid B?

= $X + 2 Y + 2 Z$ (zie processen 1, 2, 3)

Of dus: verbruikte hoeveelheid B $\leq$ geproduceerde hoeveelheid B (met A, B, X, Y, Z, V in 100ml):

$X + 2 Y + 2 Z \leq B$

Beperkingen

Verband tussen afval en parfums:

“Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. “Kees!” kan gratis vloeibaar afval dumpen in de Zenne of het afval gebruiken om parfum Z te maken. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt.”

$200 \text{ ml A} + 100 \text{ ml B} \rightarrow 100 \text{ ml X} + 100 \text{ ml V}$ [Proces 1]

$100 \text{ ml A} + 200 \text{ ml B} \rightarrow 100 \text{ ml Y} + 80 \text{ ml V}$ [Proces 2]

$50 \text{ ml A} + 200 \text{ ml B} + 120 \text{ ml V} \rightarrow 100 \text{ ml Z}$ [Proces 3]

Hoeveelheid geproduceerd afval wordt bepaald door productie X en Y

Geproduceerde hoeveelheid V?

$$V = X + 0,8 Y \quad (\text{zie processen 1 en 2})$$

Niet meer vloeibaar afval gebruiken/dumpen dan geproduceerd

Verbruikte hoeveelheid V?

$$1,2 Z + D \quad (\text{zie proces 3 en dumpen})$$

Of dus: verbruikte hoeveelheid V $\leq$ geproduceerde hoeveelheid V (met V, D, X, Y, Z in 100ml):

$$1,2 Z + D \leq V$$

$$V = X + 0,8 Y$$

Of kortweg: $1,2 Z + D \leq X + 0,8 Y$

Beperkingen

Verwerkingstijden:

“Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.”

“Proces 1 duurt 2 uur ... Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur ... Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op.”

200 ml A → 2 uur

300 ml B → 2 uur

100 ml X → 2 uur

100 ml Y → 3 uur

100 ml Z → 1 uur

Of dus: totaal aantal uur nodig voor productie A, B, X, Y, Z
 $= A + \frac{2}{3} B + 2 X + 3 Y + Z$

“Wekelijks zijn 6000 uren verwerkingstijd beschikbaar.”

Dit geeft dus:

$$A + \frac{2}{3} B + 2 X + 3 Y + Z \leq 6000$$

Beperkingen

Hoeveelheden:

“Wekelijks kan maximaal 500 liter X en 500 liter Y worden verkocht. De wekelijkse vraag naar parfum Z daarentegen is onbegrensd. ”

“De overheid legt beperkingen op en laat slechts toe 100 liter vloeibaar afval te dumpen per week.”

$$X \leq 5000$$

$$Y \leq 5000$$

$$D \leq 1000$$

(let op eenheden!)

En niet vergeten...

Alle variabelen niet-negatief!

$$X, Y, Z, A, B, V, D \geq 0$$

Doelfunctie

“Producten X en Y verkopen tegen respectievelijk 18€ en 23€ per 100 ml.; 100 ml. van parfum Z kan verkocht worden tegen 16€.”

“Om deze parfums te kunnen maken, gebruikt het bedrijf een grondstof die het onbeperkt kan aankopen aan 5 €/liter.”

“Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits ... 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits ... 4 € verwerkingskosten.”

“Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 ... Het kost 1 € om dit proces uit te voeren. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 ... Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Proces 2 kost 7 € om uit te voeren. Het productieproces om parfum Z te maken ... levert 100 ml. van parfum Z op. Bovendien kost dit productieproces 5€.”

Formuleer een LO model dat de wekelijkse winst voor “Kees!” maximaliseert.

Opbrengsten: $18X + 23Y + 16Z$

Kosten: $5G + A + 4/3B + X + 7Y + 5Z$

Doelfunctie: $17X + 16Y + 11Z - 5G - A - 4/3B$

Het model

$$\max 17 X + 16 Y + 11 Z - 5G - A - 4/3 B$$

zdd

$$G = 1/2 A + 1/3 B$$

$$2 X + Y + 1/2 Z \leq A$$

$$X + 2 Y + 2 Z \leq B$$

$$1,2 Z + D \leq X + 0,8 Y$$

$$A + 2/3 B + 2 X + 3 Y + Z \leq 6000$$

$$X \leq 5000$$

$$Y \leq 5000$$

$$D \leq 1000$$

$$X, Y, Z, A, B, V, D \geq 0$$

Opgave 2

Los volgend probleem op met de twee-fasen methode.

$$\min 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

Eerste stap

Standaardvorm!

$$\min 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$



$$\max -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

Eerste stap

Standaardvorm!

$$\max -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$



$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Eerste stap

Standaardvorm!

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Fase 1

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min x_0$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_0 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_0 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_0 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

w	=								-	x₀
x₄	=	2	-	x₁	-	x₂	-	x₃	+	x₀
x₅	=	3	-	2 x₁	-	x₂			+	x₀
x₆	=	-3	+	2 x₁	+	x₂	+	3 x₃	+	x₀

Niet-toelaatbaar dictionair

x_0 in de basis, x_6 er uit.

Fase 1

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{w} & = & -3 & + 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_6 \\ \hline \mathbf{x}_0 & = & 3 & - 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_4 & = & 5 & - 3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 - 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_5 & = & 6 & - 4\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_6 \end{array}$$

x_3 in de basis, x_0 er uit.

Fase 1

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

w	=					-	x₀
x₃	=	1	- 2/3 x₁	- 1/3 x₂	+ 1/3 x₆	- 1/3 x₀	
x₄	=	1	- 1/3 x₁	- 2/3 x₂	- 1/3 x₆	+ 4/3 x₀	
x₅	=	3	- 2 x₁	- x₂		+ x₀	

Dit is een optimale oplossing. Maar...

We zijn nog niet klaar, enkel een toelaatbare startoplossing gevonden (antwoord B).

Fase 2

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_3 invullen in doelfunctie levert

$$z = -2x_1 + x_2 - 3 + 2x_1 + x_2 - x_6$$

$$\begin{array}{rcl}
 z & = & -3 \qquad \qquad \qquad + 2x_2 - x_6 \\
 \hline
 x_3 & = & 1 - 2/3x_1 - 1/3x_2 + 1/3x_6 \\
 x_4 & = & 1 - 1/3x_1 - 2/3x_2 - 1/3x_6 \\
 x_5 & = & 3 - 2x_1 - x_2
 \end{array}$$

x_2 in de basis, x_4 er uit.

Fase 2

$$\max -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

zdd

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

z	=	0	-	x₁	-	3x₄	-	2x₆
x₂	=	3/2	-	1/2x₁	-	3/2x₄	-	1/2x₆
x₃	=	1/2	-	1/2x₁	+	1/2x₄	+	1/2x₆
x₅	=	3/2	-	3/2x₁	+	3/2x₄	+	1/2x₆

Dit is de optimale oplossing (antwoord A).

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 +11x3
st
12x1 +4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 +3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
end
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Laatste dictionair

$z = \dots$

$$x_2 = 2 + x_1 - 3x_3 - x_5$$

$$x_4 = 2 - 16x_1 + 2x_3 + 4x_5$$

$$x_6 = 1 - 5x_1 + 10x_3 + 3x_5$$

Hieruit kunnen we B^{-1} aflezen

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

De gereduceerde kost van een beslissingsvariabele x_j is het bedrag waarmee de doelfunctiecoëfficiënt van x_j minstens moet worden verbeterd opdat het LO-model een optimale oplossing zou hebben met x_j als basisvariabele.

Voor een niet-basisvariabele is de gereduceerde kost $-1 \cdot$ coëfficiënt in z-rij van laatste dictionair:

$$c'_1 = c_1 - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_1$$

$$= -4 - (4 \ 0 \ 0) \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$$

Dus: (A) = 0

Voor een basisvariabele is de gereduceerde kost = 0.

Dus: (B) = 0

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      8.000000
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Slack/surplus is niets anders dan het verschil tussen rechter- en linkerlid (spelingsvariabele).

$$\text{Dus (C)} = 10 - (12 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 0) = 2$$

De duale prijs (of schaduwprijs) van beperking i , is het bedrag waarmee de optimale z -waarde verbetert per eenheid toename van het rechterlid b_i , op voorwaarde dat na deze toename van het rechterlid de huidige basissamenstelling behouden blijft.

In geval van een maximalisatie probleem zijn dit de duale variabelen, of $-1 \cdot$ coëfficiënt in z -rij van laatste dictionair.

$$\begin{aligned} c'_5 &= c_5 - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_5 \\ &= 0 - (4 \ 0 \ 0) \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \end{aligned}$$

$$\text{Dus: (D)} = 4$$

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

De duale prijs (of schaduwprijs) van beperking i, is het bedrag waarmee de optimale z-waarde verbetert per eenheid toename van het rechterlid b_i , op voorwaarde dat na deze toename van het rechterlid de huidige basissamenstelling behouden blijft.

In geval van een maximalisatie probleem zijn dit de duale variabelen, of $-1 \cdot$ coëfficiënt in z-rij van laatste dictionair.

$$c'_6 = c_6 - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_6$$

$$= 0 - (4 \ 0 \ 0) \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dus: (E) = 0

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 +11x3
st
12x1 +4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 +3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Allowable increase/decrease slaat op het stabiliteitsinterval:

Voor x_1 is het duidelijk dat het verlagen van c_1 er nooit voor zal zorgen dat x_1 in de basis komt

Dus: (F) = ∞ (en niet $-\infty$!!)

Stabiliteitsinterval x_3 (=niet-basisvariabele!)

$$c'_3 = c_3 - c_B * B^{-1} * a_3$$

$$= c_3 - (4 \ 0 \ 0) * B^{-1} * \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = c_3 - 12$$

x_3 komt in de basis zodra $c_3 \geq 12$

Dus: (I) = 1 en (J) = ∞

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Stabiliteitsinterval x_2 (=basisvariabele!)

$$c'_1 = c_1 - c_B * B^{-1} * a_1$$

$$= -4 - (c_2 \ 0 \ 0) * B^{-1} * \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + c_2$$

x_2 blijft in de basis zolang $c_2 \leq 4$

$$c'_3 = 11 - (c_2 \ 0 \ 0) * B^{-1} * \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 11 - 3c_2$$

x_2 blijft in de basis zolang $c_2 \geq 11/3$

$$c'_5 = 11 - (c_2 \ 0 \ 0) * B^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{ok})$$

Samengevat:

x_2 blijft in de basis zolang $11/3 \leq c_2 \leq 4$

Dus: (G) = 0 en (H) = 1/3

Opgave 3

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3
st
12x1 + 4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 + 3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
End
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	... (A)
X2	2.000000	... (B)
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	... (C)	0.000000
3)	0.000000	... (D)
4)	1.000000	... (E)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	-4.000000	0.000000	... (F)
X2	4.000000	... (G)	... (H)
X3	11.000000	... (I)	... (J)

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	10.000000	INFINITY	2.000000
3	2.000000	... (K)	... (L)
4	7.000000	INFINITY	1.000000

Stabiliteitsinterval rechterlid b_2 :

Zorgen dat $B^{-1} \cdot b$ niet negatief wordt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ b_2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Leidt tot voorwaarden:

$$b_2 \geq 0$$

$$10 - 4b_2 \geq 0$$

$$-3b_2 + 7 \geq 0$$

$$\text{of } b_2 \leq 10/4$$

$$\text{of } b_2 \leq 7/3$$

Samengevat:

$$0 \leq b_2 \leq 7/3$$

Dus: (K) = 1/3 en (L) = 2

Opgave 3

Heeft dit model meerdere optimale oplossingen? Indien ja, geef een omschrijving van alle optimale oplossingen. Indien nee, verklaar uw antwoord.

Inmiddels hebben we het laatste dictionair gereconstrueerd:

$$\mathbf{z} = 8 + 0\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 - 4\mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{x}_2 = 2 + \mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{x}_4 = 2 - 16\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_3 + 4\mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 - 5\mathbf{x}_1 + 10\mathbf{x}_3 + 3\mathbf{x}_5$$

Er is een alternatieve optimale oplossing: X_1 in de basis, X_4 er uit.

Opgave 3

Heeft dit model meerdere optimale oplossingen? Indien ja, geef een omschrijving van alle optimale oplossingen. Indien nee, verklaar uw antwoord.

Inmiddels hebben we het laatste dictionair gereconstrueerd:

$$\underline{z = 8 + 0x_4 - x_3 - 4x_5}$$

$$x_1 = 1/8 + \dots$$

$$x_2 = 17/8 + \dots$$

$$x_6 = 3/8 + \dots$$

Er is zijn dus 2 optimale basisoplossingen: $(0,2,0,2,0,1)$ en $(1/8,17/8,0,0,0,3/8)$.

Alle optimale oplossingen worden gegeven door:

$$\lambda_1 (0,2,0,2,0,1) + \lambda_2 (1/8,17/8,0,0,0,3/8) \text{ met } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ én } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Opgave 3

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3 + 6q
st
12x1 + 4x2 + 10x3 + q < 10
-x1 + x2 + 3x3 + q < 2
2x1 + 3x2 - x3 + 2q < 7
End
```

Stel dat een nieuwe variabele $q \geq 0$ aan het model wordt toegevoegd, met als doelfunctiecoëfficiënt 6, en technologische coëfficiënten 1, 1, en 2 in respectievelijk de 1^{ste}, 2^{de} en 3^{de} beperking. Is de huidige basisoplossing dan nog steeds toelaatbaar en/of optimaal? Verklaar uw antwoord.

Toelaatbaar?

De huidige basisoplossing blijft altijd toelaatbaar.

Kies $q=0$ (niet-basisvariabele), en dezelfde waarden voor x_i , en deze oplossing voldoet nog steeds aan de beperkingen.

Opgave 3

```
max -4x1 + 4x2 + 11x3 + 6q
st
12x1 + 4x2 + 10x3 + q < 10
-x1 + x2 + 3x3 + q < 2
2x1 + 3x2 - x3 + 2q < 7
End
```

Stel dat een nieuwe variabele $q \geq 0$ aan het model wordt toegevoegd, met als doelfunctiecoëfficiënt 6, en technologische coëfficiënten 1, 1, en 2 in respectievelijk de 1^{ste}, 2^{de} en 3^{de} beperking. Is de huidige basisoplossing dan nog steeds toelaatbaar en/of optimaal? Verklaar uw antwoord.

Optimaal?

De huidige basisoplossing blijft optimaal als de overeenkomstige duale oplossing toelaatbaar blijft.

In de duaal komt er een nieuwe beperking bij, nl $1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 6$.

De huidige duale oplossing is $y_1=0$, $y_2=4$, $y_3=0$ (zie coeff. spelingsvariabelen z-rij laatste dictionair).

Deze oplossing voldoet niet aan de nieuwe beperking ($4 < 6$)

De huidige basisoplossing is dus niet meer optimaal!

Opgave 4

Beschouw het volgende LO model:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

1. Stel de duaal op van dit model
2. Beschouw de volgende oplossing voor het gegeven model: $x_1 = 5/2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$
 - a. Wat is de bijhorende duale oplossing?
 - b. Toon aan of de voorgestelde oplossing voor het gegeven model al dan niet optimaal is.

Hint: maak gebruik van complementary slackness; ga niet simplexen.

De dual

Primaal: Max

Zodanig dat

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i && \text{voor } i \in O^{\leq}, \\
 &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i && \text{voor } i \in O^{\geq}, \\
 &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i && \text{voor } i \in O^=, \\
 &x_j \geq 0 && \text{voor } j \in T^{\geq}, \\
 &x_j \leq 0 && \text{voor } j \in T^{\leq}, \\
 &x_j \text{ oit} && \text{voor } j \in T.
 \end{aligned}$$

Duaal: Min

Zodanig dat

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 &\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j && \text{voor } j \in T^{\geq}, \\
 &\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j && \text{voor } j \in T^{\leq}, \\
 &\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j && \text{voor } j \in T, \\
 &y_i \geq 0 && \text{voor } i \in O^{\leq}, \\
 &y_i \leq 0 && \text{voor } i \in O^{\geq}, \\
 &y_i \text{ oit} && \text{voor } i \in O^=.
 \end{aligned}$$

Duaal

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0$$

Wat met x_1 ?

Onbeperkt in teken!

$$\max 0y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Voorgestelde oplossing $x_1^* = 5/2, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$.

Gebruik complementary slackness: beschouw de gegeven primale oplossing x^* . Laten we een duale oplossing y^* construeren met behulp van complementary slackness. Er geldt:

$y_i^* = 0$ als $\sum_j a_{ij} x_j^* \neq b_i$ voor alle i . Dus...

invullen van de gegeven x -oplossing in de eerste beperking levert:

$$5/2 + 3 \cdot 2 - 0 > 0.$$

Conclusie $y_1^* = 0$.

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Voorgestelde oplossing $x_1^* = 5/2, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$.

Gebruik complementary slackness: beschouw de gegeven primale oplossing x^* . Laten we een duale oplossing y^* construeren met behulp van complementary slackness. Er geldt:

$y_i^* = 0$ als $\sum_j a_{ij} x_j^* \neq b_i$ voor alle i . Dus...

invullen van de gegeven x-oplossing in de eerste beperking levert:

$$2 \cdot (5/2) - 3 + 4 \cdot 0 = 2.$$

Conclusie $y_2^* \geq 0$.

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Voorgestelde oplossing $x_1^* = 5/2, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$.

Gebruik complementary slackness: beschouw de gegeven primale oplossing x^* . Laten we een duale oplossing y^* construeren met behulp van complementary slackness. Er geldt:

$y_i^* = 0$ als $\sum_j a_{ij} x_j^* \neq b_i$ voor alle i . Dus...

invullen van de gegeven x -oplossing in de eerste beperking levert:

$$3 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 3.$$

Conclusie $y_3^* \leq 0$.

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Voorgestelde oplossing $x_1^* = 5/2$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$.

Wat weten we van vorige slides? $y_1^* = 0$.

Complementary slackness zegt ook: $\sum_i a_{ij} y_i^* = c_j$ als $x_j^* \neq 0$ voor alle j :

$$x_1^* > 0: \text{ Dus } y_1^* + 2y_2^* = 6$$

$$x_2^* > 0: \text{ Dus } 2y_1^* - y_2^* + y_3^* = -4$$

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Voorgestelde oplossing $x_1^* = 5/2, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$.

$$y_1^* = 0$$

$$y_1^* + 2y_2^* = 6$$

$$2y_1^* - y_2^* + y_3^* = -4$$

$$\rightarrow y_2^* = 3$$

$$\rightarrow y_3^* = -4 + 3 = -1$$

Opgave 4

Primaal:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

$$\text{Opl: } x_1^* = 5/2, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$$

Duaal:

$$\max 2y_2 + 3y_3$$

zdd

$$y_1 + 2y_2 = 6$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq -4$$

$$4y_2 - 3y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 4y_3 \leq -2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

$$\text{Opl: } y_1^* = 0, y_2^* = 3, y_3^* = -1$$

Is de voorgesteld oplossing optimaal?

- Voldoet x^* aan de beperkingen van de primaal? JA (controleer dit!!)
- Voldoet y^* aan de beperkingen van de duaal? JA (controleer dit!!)
- Hebben x^* en y^* dezelfde doelfunctiewaarde? JA (nl. 3)

Oefening 2.13

Een bedrijf vervaardigt zes producten die we voor de eenvoud product 1 tot en met product 6 zullen noemen.

Per eenheid grondstof kan 1 eenheid van product 1 of 2 eenheden van product 2 of 3 eenheden van product 3 worden vervaardigd. Over de beschouwde planningshorizon kunnen maximaal 1200 eenheden van product 1 en maximaal 300 eenheden van product 2 verkocht worden. Van de grondstof kunnen maximaal 3000 eenheden aangekocht worden en dit tegen een prijs van 180 Euro per eenheid.

In plaats van een eenheid van product 1 onmiddellijk te verkopen, kan ze ook verder bewerkt worden tot een nieuw product. Per eenheid van product 1 die verder bewerkt wordt, komt er zo 1 eenheid van product 4 tot stand. Zowel voor product 3 als voor product 4 is de vraag onbeperkt.

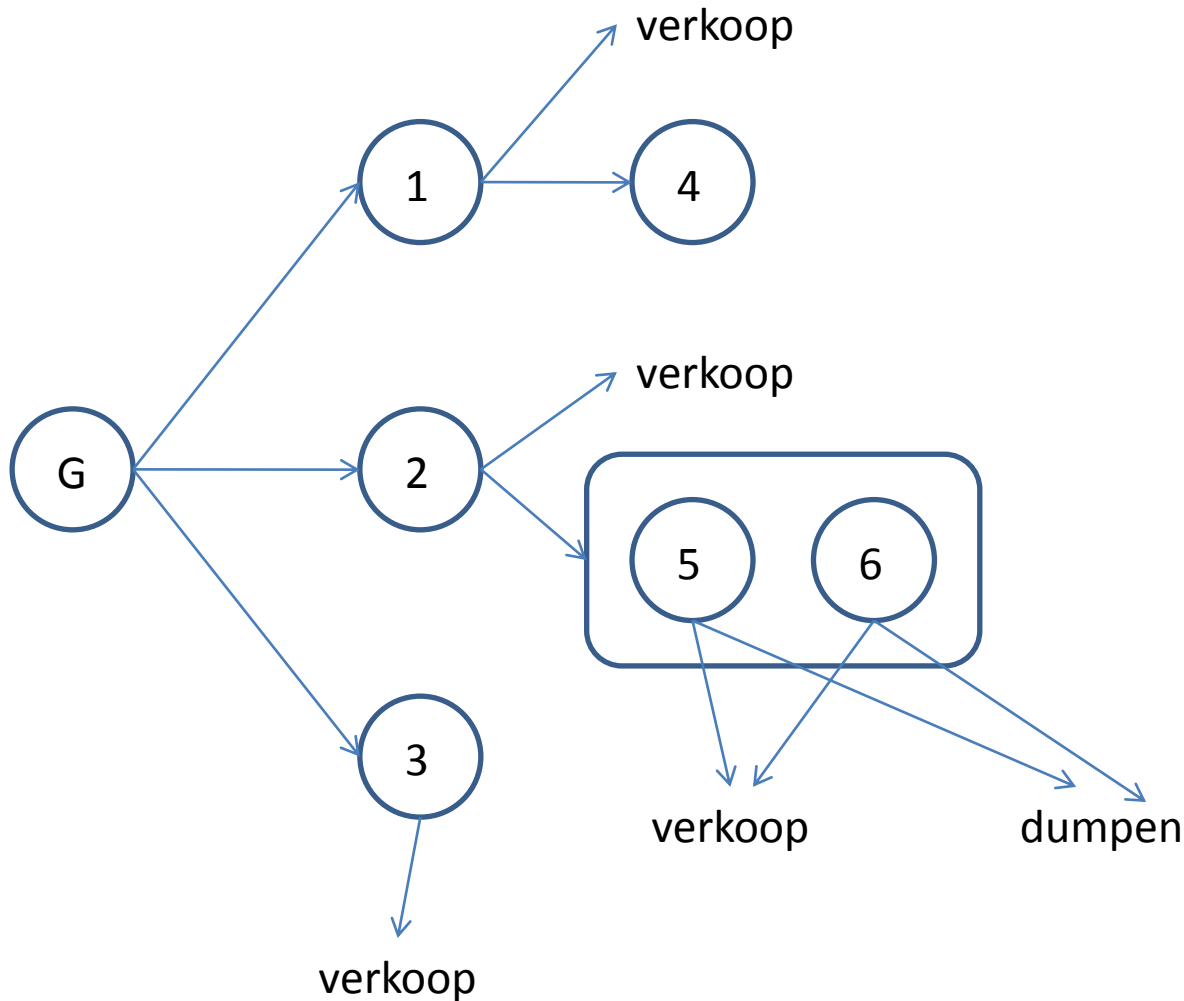
Ook product 2 kan mits een aantal bewerkingen omgevormd worden tot nieuwe producten. Per eenheid van product 2 die zo verwerkt wordt, komen 0.8 eenheden van product 5 en 0.3 eenheden van product 6 tot stand. Voor product 5 is de vraag 1500 eenheden en voor product 6 zijn dit slechts 800 eenheden. De niet-verkochte eenheden van product 5 en 6 moeten vernietigd worden omdat ze maar gedurende een beperkte tijd houdbaar zijn. Het kost 400 Euro om een eenheid van product 5 te vernietigen en 300 Euro om een eenheid van product 6 te vernietigen.

In de onderstaande tabel is voor elk van de zes producten de winst per eenheid gegeven. In deze winst werd de kost van de grondstof nog niet meegerekend. Het bedrijf wil weten welke hoeveelheden van elk van de producten leiden tot de maximale winst.

Formuleer dit probleem als een LO-model en los het op.

Product 1	1000€
Product 2	800€
Product 3	600€
Product 4	500€
Product 5	600€
Product 6	900€

Oefening 2.13



Variabelen:

Grondstof:
G

Productie:
P1 – P6

Verkoop:
V1 – V6

Dumpen:
D5, D6

(alle variabelen in
eenheden)

Oefening 2.13

- Beperking: grondstof linken aan productie 1,2,3

Eenheid G levert P_1 , $2 \cdot P_2$ **of** $3 \cdot P_3$

$$G = P_1 + 1/2 P_2 + 1/3 P_3$$

Opmerking: wat indien **en** ?

$$G = P_1$$

$$G = 1/2 P_2$$

$$G = 1/3 P_3$$

Oefening 2.13

- Beperking: productie P4

1 eenheid P1 kan worden verkocht (V1) of verwerkt tot 1 eenheid product 4 (P4)

$$P1 = V1 + P4$$

- Beperking: productie P5 en P6

1 eenheid P2 kan worden verkocht (V2) of verwerkt tot 0.8 eenheden product 5 (P5) én 0.3 eenheden product 6 (P6)

$$0.8(P2 - V2) = P5$$

$$0.3(P2 - V2) = P6$$

Oefening 2.13

- Beperking: verband productie – verkoop – dumpen

Je kan niet meer verkopen (+ dumpen) dan geproduceerd:

$$V1 \leq P1 \text{ (overbodig)}$$

$$V2 \leq P2$$

$$V3 = P3 \text{ (alle productie van product 3 kan onbeperkt verkocht worden)}$$

$$V4 = P4 \text{ (alle productie van product 3 kan onbeperkt verkocht worden)}$$

$$V5 + D5 = P5$$

$$V6 + D6 = P6$$

Oefening 2.13

- Beperkingen: hoeveelheden

$$G \leq 3000$$

$$V1 \leq 1200$$

$$V2 \leq 300$$

$$V5 \leq 1500$$

$$V6 \leq 600$$

- Beperkingen: niet-negativiteit

$$G, V1, V2, V3, V4, V5, V6, P1, P2, P3, P4, P5, P6, D5, D6 \geq 0$$

Oefening 2.13

- Doelfunctie

Opbrengsten:

$$1000 V1 + 800 V2 + 600 V3 + 500 V4 + 600 V5 + 900 V6$$

Kosten:

$$180 G + 400 D5 + 300 D6$$

Oefening 4.1

Stel voor onderstaand LO-model het toegelaten gebied grafisch voor en teken op deze grafische voorstelling de z-lijn die behoort bij $z = 10$.

Geef, zonder de opeenvolgende dictionaires uit te rekenen, op deze voorstelling het pad aan dat door de simplex methode zou gevolgd worden.

Geef bij elke iteratie aan wat de inkomende en wat de uitgaande variabele is.

$$\max z = 10x_1 + x_2$$

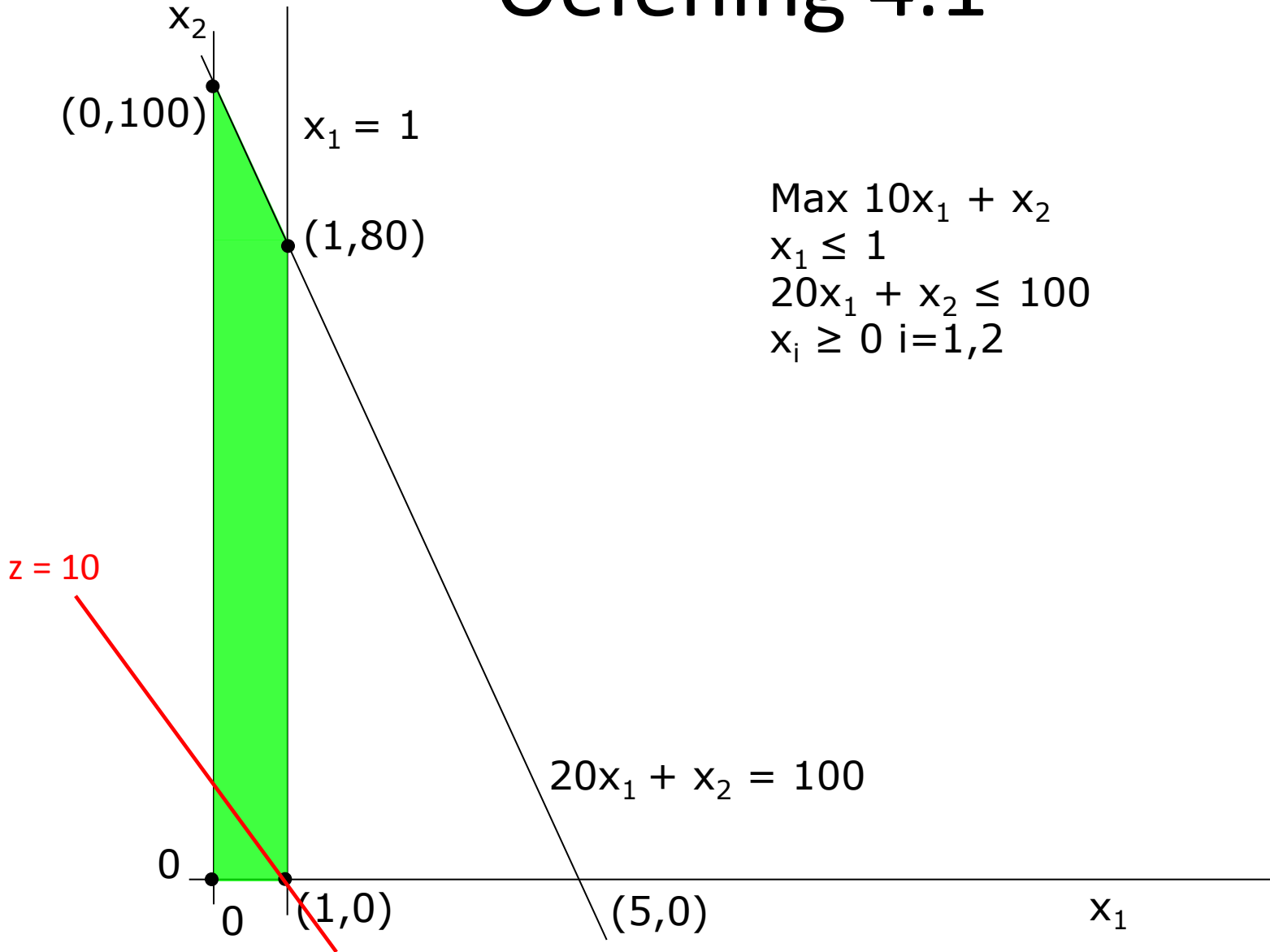
zdd

$$x_1 \leq 1$$

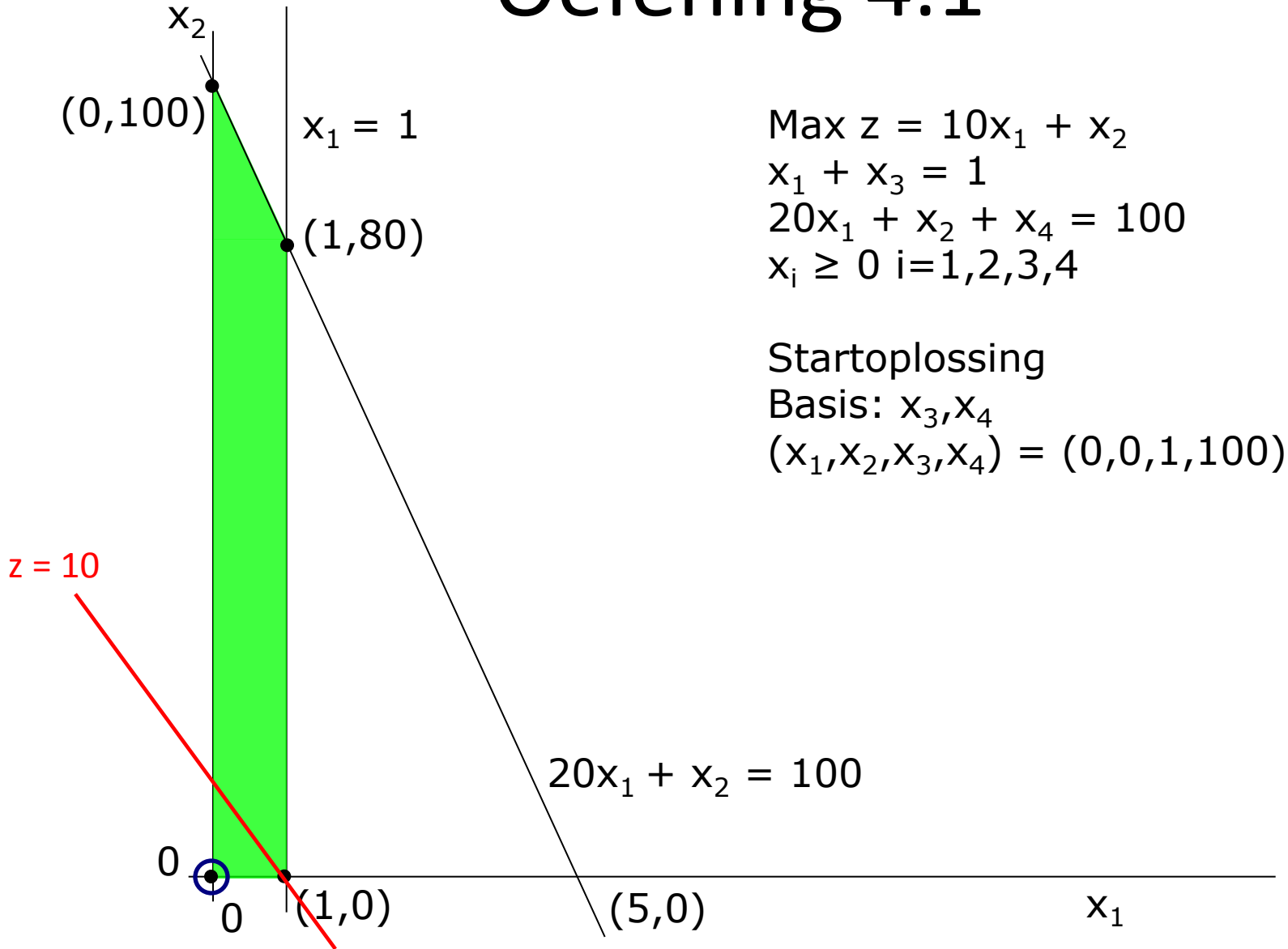
$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_i \geq 0 \text{ voor } i = 1, 2.$$

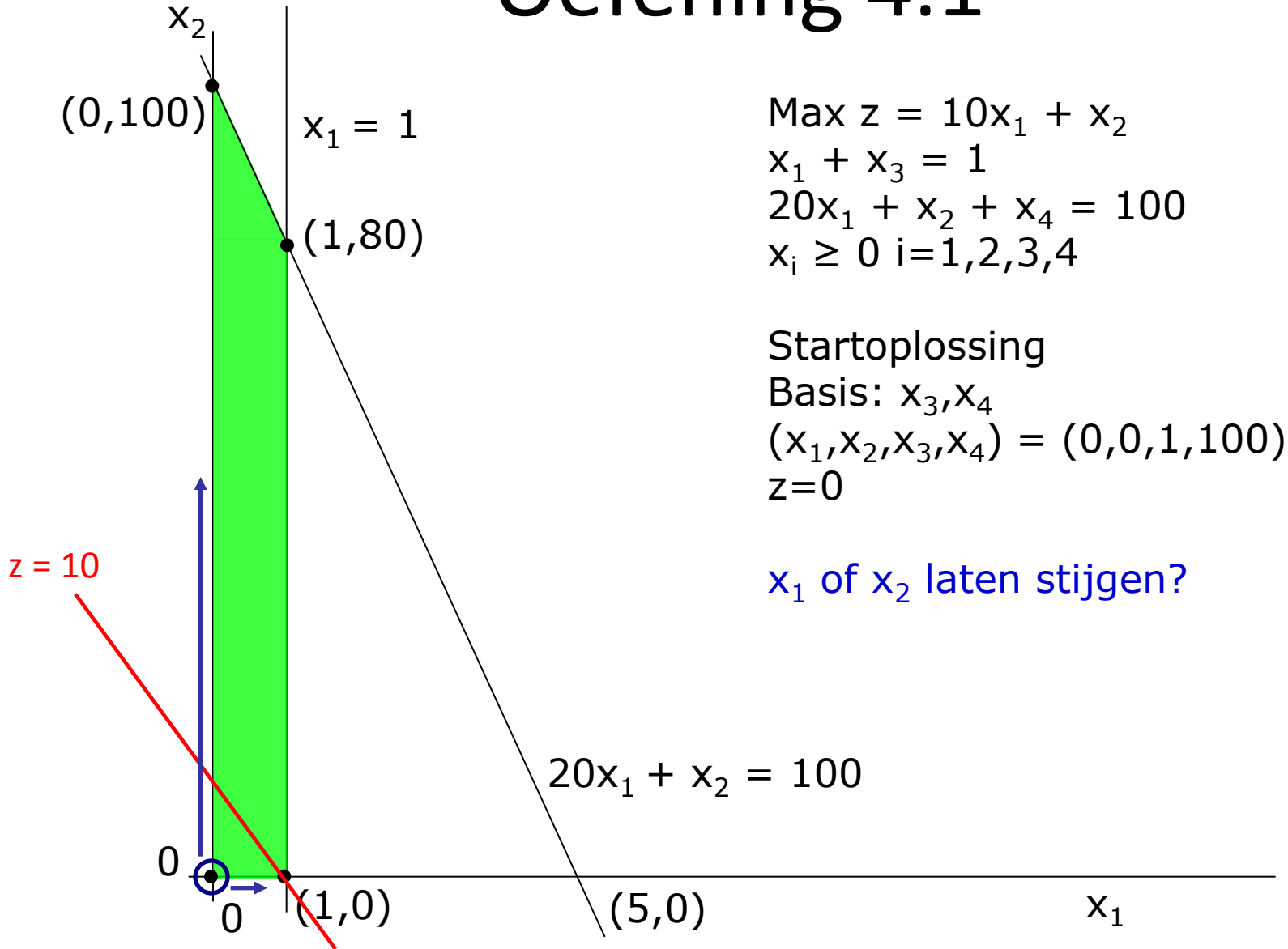
Oefening 4.1



Oefening 4.1



Oefening 4.1



$$\text{Max } z = 10x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$20x_1 + x_2 + x_4 = 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4$$

Startoplossing

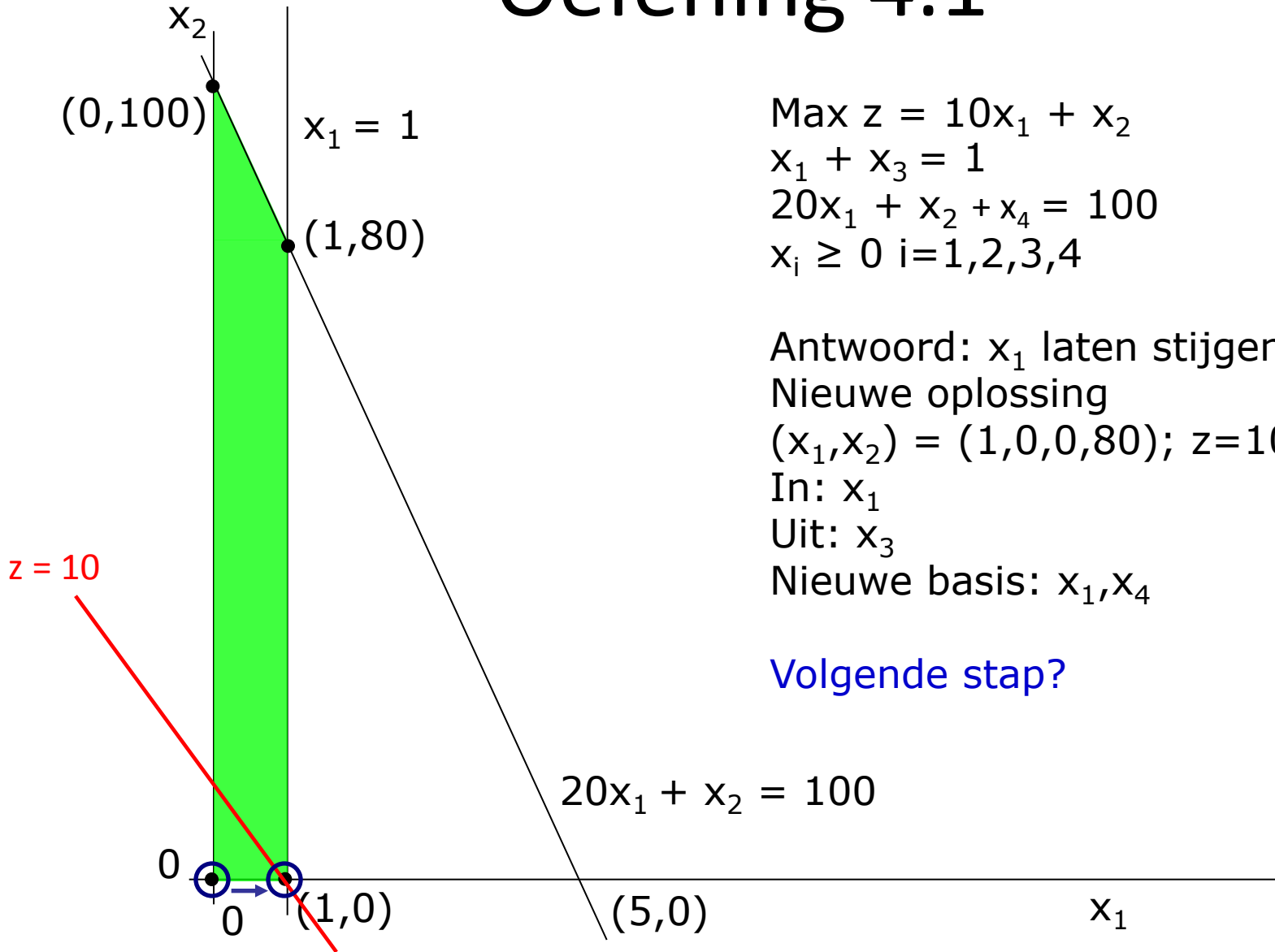
Basis: x_3, x_4

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 100)$$

$$z = 0$$

x_1 of x_2 laten stijgen?

Oefening 4.1



$$\begin{aligned}\text{Max } z &= 10x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 20x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\ x_i &\geq 0 \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

Antwoord: x_1 laten stijgen!

Nieuwe oplossing

$$(x_1, x_2) = (1, 0, 0, 80); z=10$$

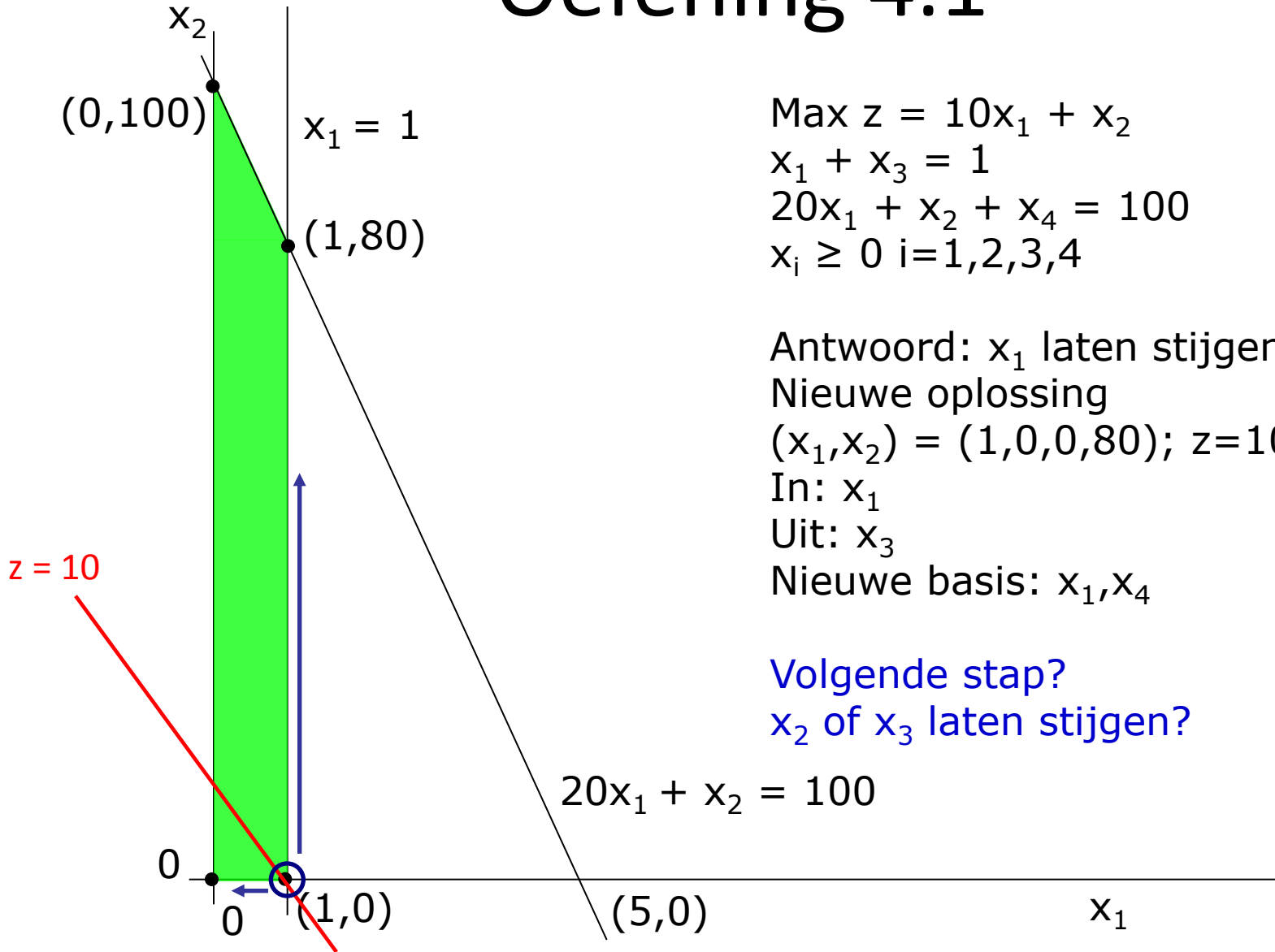
In: x_1

Uit: x_3

Nieuwe basis: x_1, x_4

Volgende stap?

Oefening 4.1



$$\text{Max } z = 10x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$20x_1 + x_2 + x_4 = 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4$$

Antwoord: x_1 laten stijgen!

Nieuwe oplossing

$$(x_1, x_2) = (1, 0, 0, 80); \quad z=10$$

In: x_1

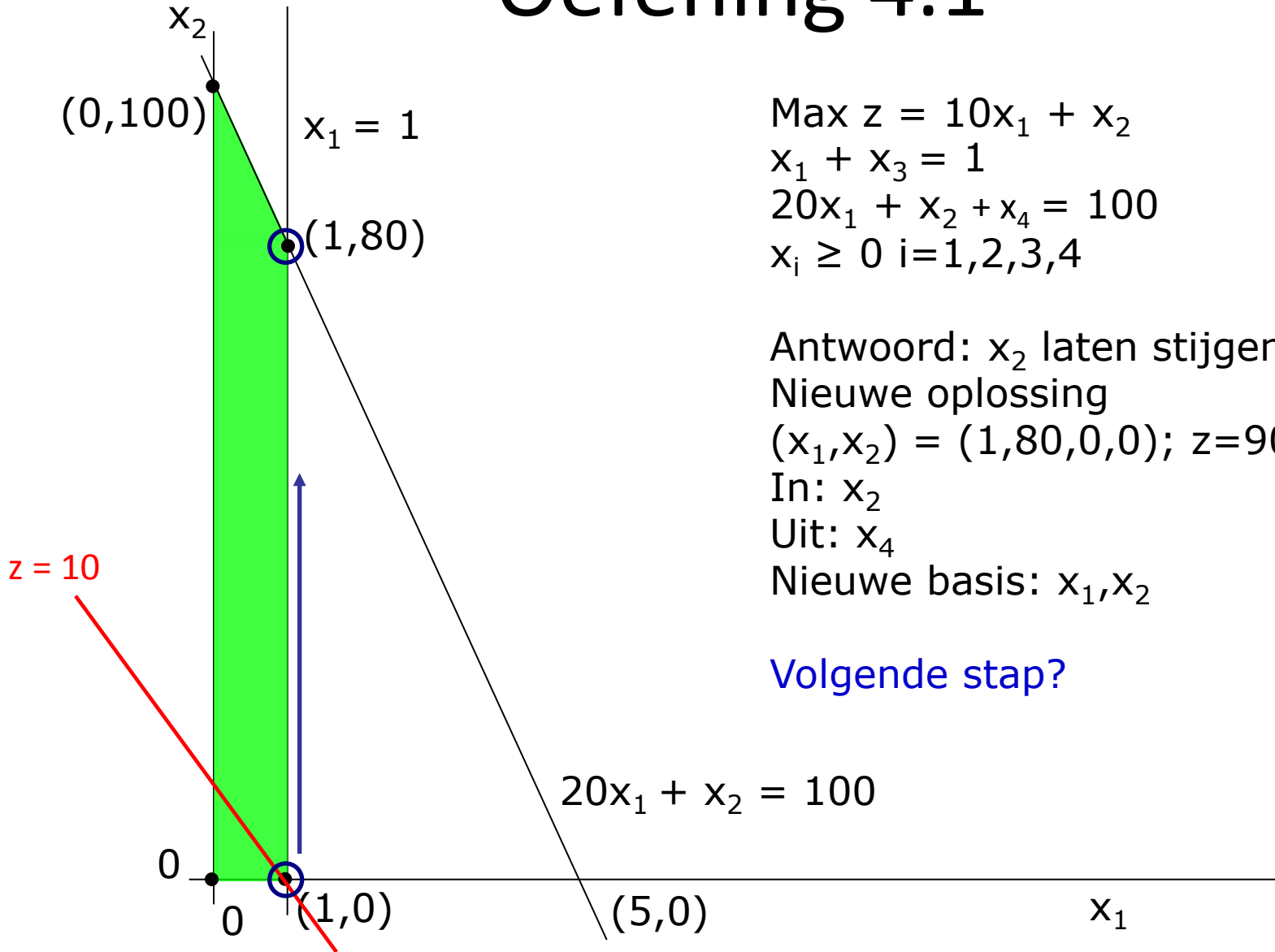
Uit: x_3

Nieuwe basis: x_1, x_4

Volgende stap?

x_2 of x_3 laten stijgen?

Oefening 4.1



$$\text{Max } z = 10x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$20x_1 + x_2 + x_4 = 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4$$

Antwoord: x_2 laten stijgen!

Nieuwe oplossing

$$(x_1, x_2) = (1, 80, 0, 0); \quad z=90$$

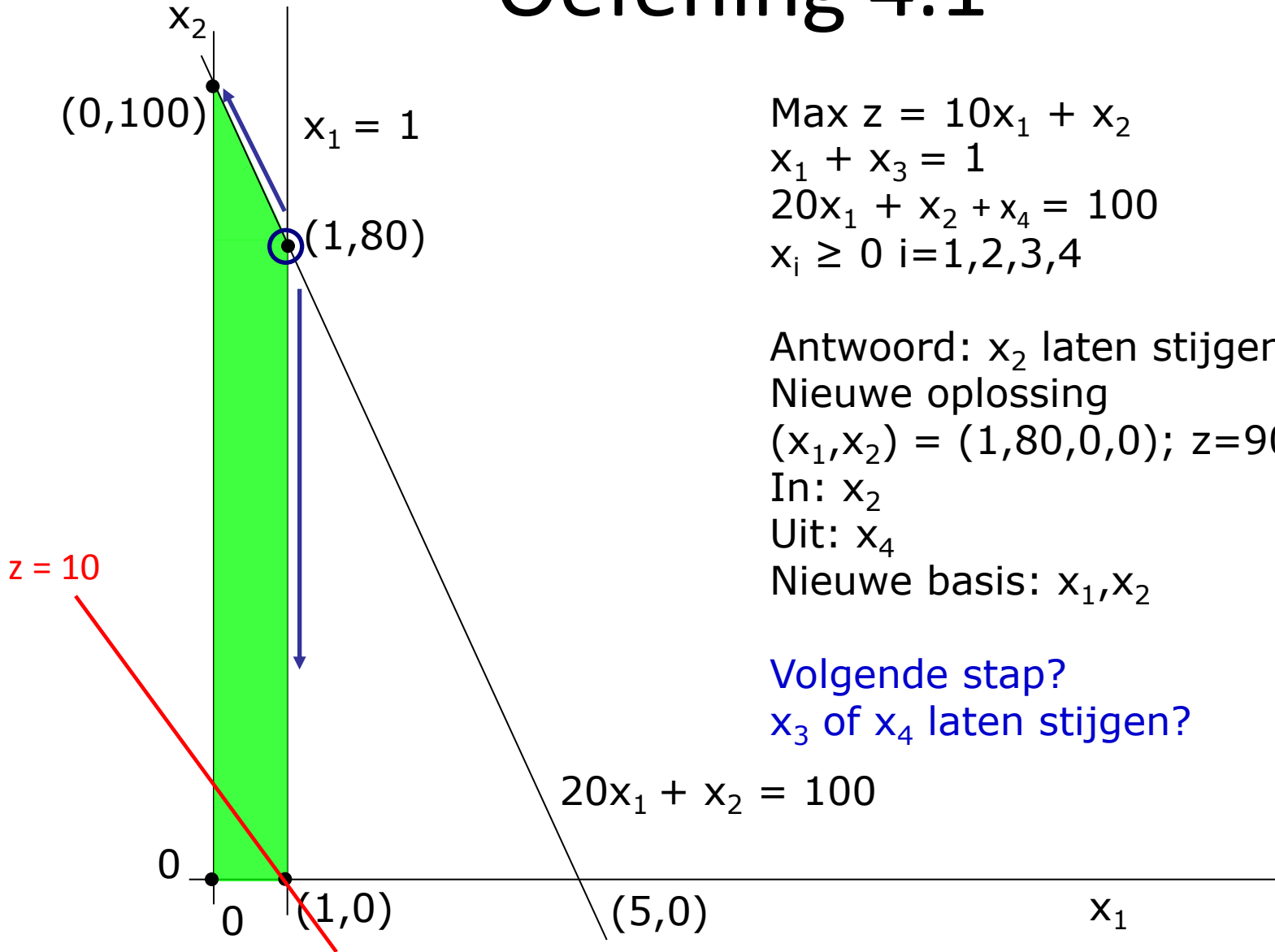
In: x_2

Uit: x_4

Nieuwe basis: x_1, x_2

Volgende stap?

Oefening 4.1



$$\text{Max } z = 10x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$20x_1 + x_2 + x_4 = 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4$$

Antwoord: x_2 laten stijgen!

Nieuwe oplossing

$$(x_1, x_2) = (1, 80, 0, 0); \quad z=90$$

In: x_2

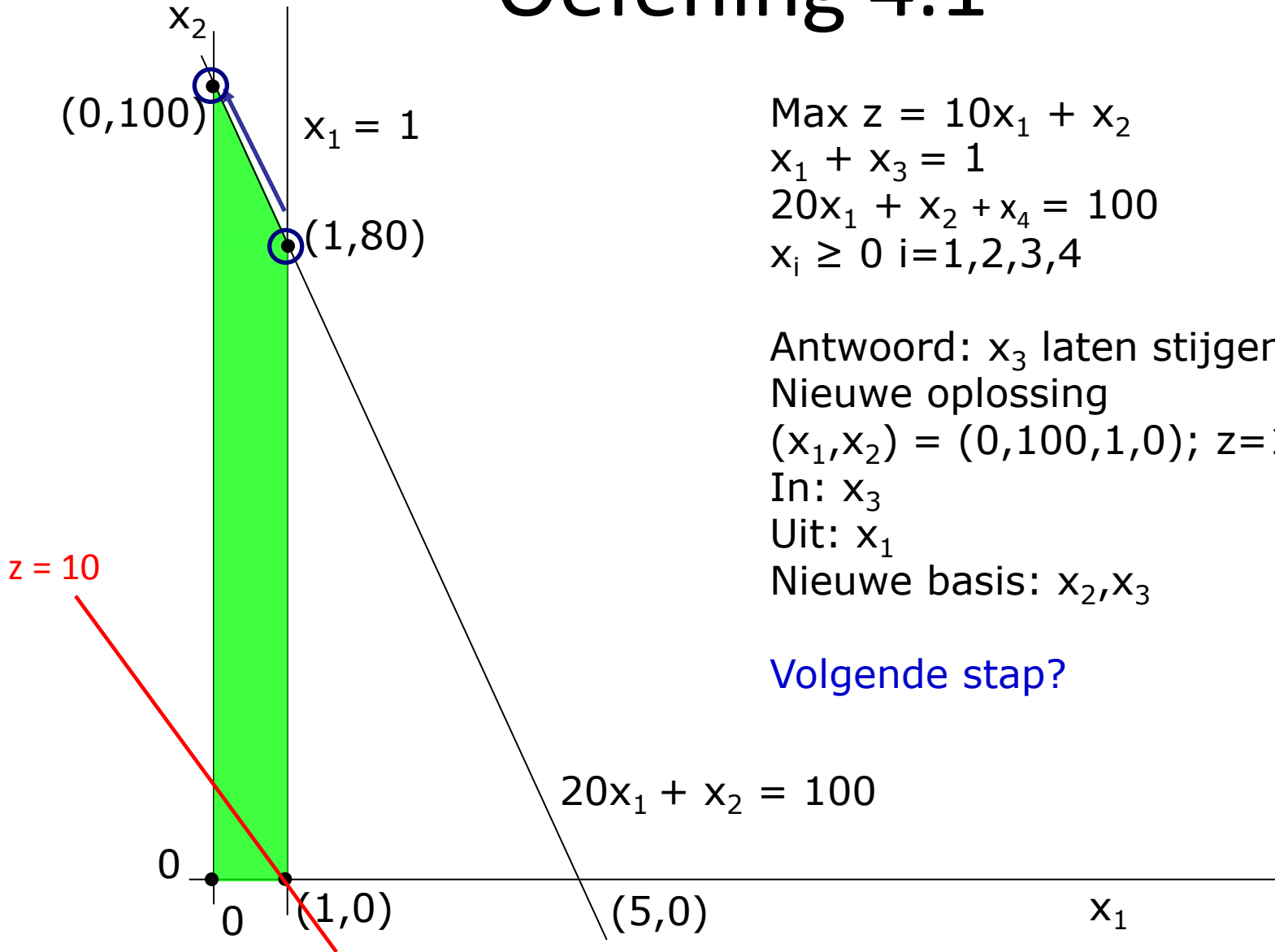
Uit: x_4

Nieuwe basis: x_1, x_2

Volgende stap?

x_3 of x_4 laten stijgen?

Oefening 4.1



$$\begin{aligned}\text{Max } z &= 10x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 20x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\ x_i &\geq 0 \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

Antwoord: x_3 laten stijgen!

Nieuwe oplossing

$$(x_1, x_2) = (0, 100, 1, 0); z = 100$$

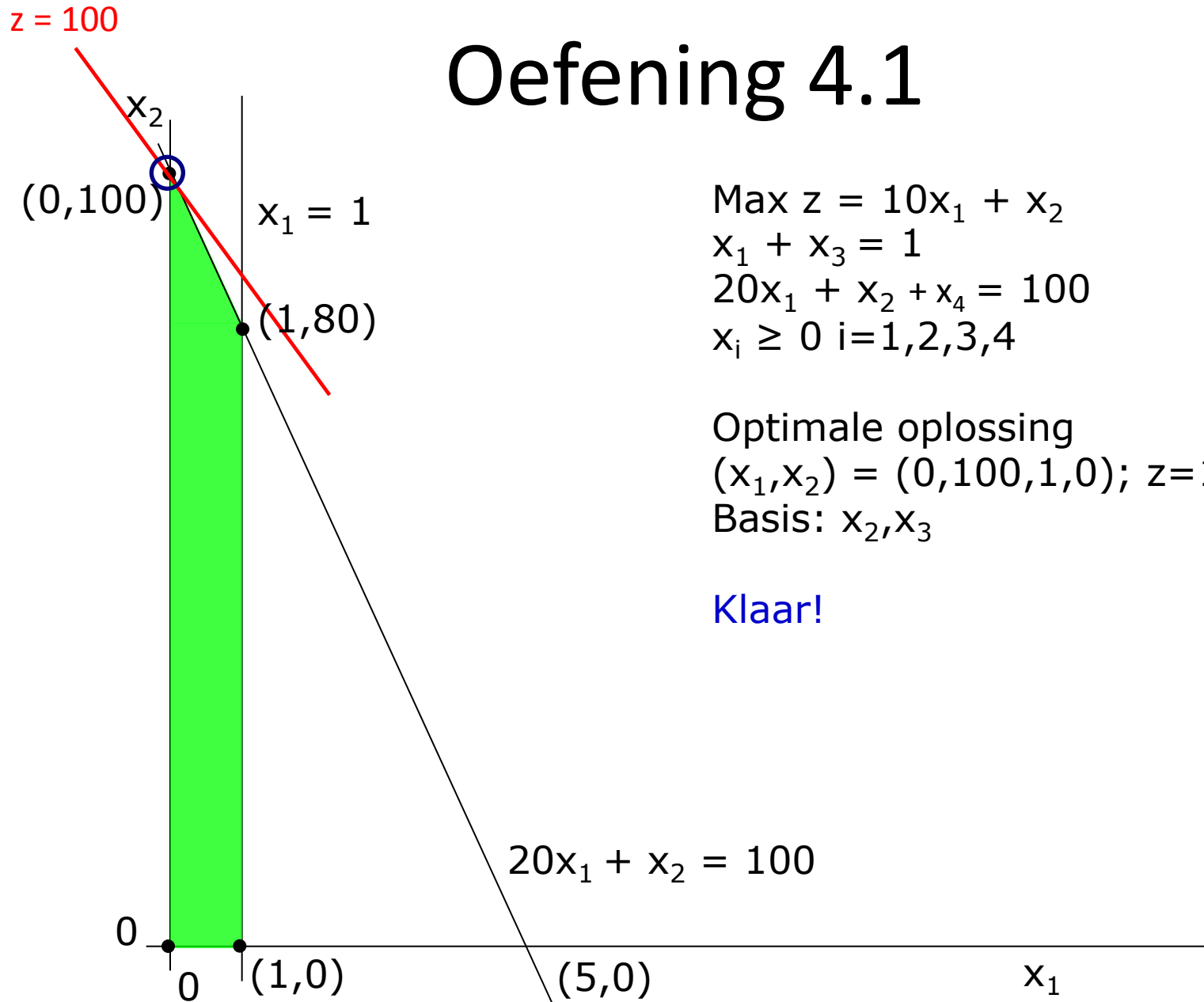
In: x_3

Uit: x_1

Nieuwe basis: x_2, x_3

Volgende stap?

Oefening 4.1



$$\begin{aligned}\text{Max } z &= 10x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 20x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\ x_i &\geq 0 \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

Optimale oplossing
 $(x_1, x_2) = (0, 100, 1, 0); z = 100$
Basis: x_2, x_3

Klaar!

Oefening 5.5

Gegeven is een LO-model in standaardvorm met 3 variabelen, en met beperkingen met als rechterleden 10,15, en 20.

In de optimale dictionair is x_5 een basisvariabele die behoort bij de tweede beperking, met waarde 12.

Bepaal voor welke waarden van het rechterlid van de tweede beperking de huidige basissamenstelling optimaal blijft.

Met andere woorden:

max ...

zdd

$$\dots + x_4 = 10$$

$$\dots + x_5 = 15$$

$$\dots + x_6 = 20$$

Oefening 5.5

max ...

zdd

$$\dots + x_4 = 10$$

$$\dots + x_5 = 15$$

$$\dots + x_6 = 20$$

In het optimale dictionair hebben de basisvariabelen waarden gegeven door $B^{-1}b$

We kennen b : $b = (b_1 \ b_2 \ b_3) = (10 \ 15 \ 20)^T$

We weten dat x_5 een basisvariabele is, veronderstel de tweede.

Er staat dus in het optimale dictionair:

$$z = \dots$$

$$x_? = ? + \dots$$

$$x_5 = 12 + \dots$$

$$x_? = ? + \dots$$

We weten dus dat $B^{-1}b = (? \ 12 \ ?)$

Oefening 5.5

max ...

zdd

$$\dots + x_4 = 10$$

$$\dots + x_5 = 15$$

$$\dots + x_6 = 20$$

We weten dat x_5 een basisvariabele is, veronderstel de tweede.

Er staat dus in het optimale dictionair:

$$z = \dots$$

$$x_? = ? + \dots$$

$$x_5 = 12 + \dots$$

$$x_? = ? + \dots$$

Als we B^{-1} proberen af te lezen uit het optimale dictionair krijgen we:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} ? & 0 & ? \\ ? & 1 & ? \\ ? & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Oefening 5.5

max ...

zdd

$$\dots + x_4 = 10$$

$$\dots + x_5 = 15$$

$$\dots + x_6 = 20$$

Bijgevolg:

$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} ? & 0 & ? \\ ? & 1 & ? \\ ? & 0 & ? \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ b_2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ?*10 + 0*b_2 + ?*20 \\ ?*10 + 1*b_2 + ?*20 \\ ?*10 + 0*b_2 + ?*20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 12 \\ ? \end{pmatrix}$$

Dus, een verandering van b_2 heeft enkel invloed op de tweede beperking.

Als b_2 met 1 verhoogt (verlaagt), stijgt (daalt) ook de waarde voor x_5 (nu 12) met 1.

Zolang b_2 dus niet met meer dan 12 daalt (of $b_2 \geq 3$), blijft de waarde voor $x_5 \geq 0$,

En blijft x_5 m.a.w. een basisvariabele.