

Examen Kansrekenen Juni 2022

Puntenverdeling: 6 op MK, 4 op theorievraag, 5 of open oefening 1, 5 op open oef 2

Meerkeuzevragen

- 1) Foute antwoord aanduiden: Er was een blad-stengeldiagram
Bereik was 88 ipv 90 want grootste getal was 90 en kleinste was 2 (x9)
ik had dat het geen variabelen op ratioschaal waren (x1)
- 2) Welke stelling is juist
 - a) Als disjuncte gebeurtenissen dus ze zijn niet onafhankelijk (x5)
 - b) Als disjunct, dan wel onafhankelijk
 - c) als onafhankelijk, dan niet disjunct
 - d) als onafhankelijk, dan disjunct
- 3) $\text{Var}(2X-Y)$ berekenen: 11/9 (x6)
X en Y zijn uniform verdeeld op $[0,2]$, $\text{cov}(X,Y)=1/9$
- 4) Welke verdeling past er bij percentage van een meer dat bevroren is :
 - a) Beta verdeling (x7)
 - b) Gamma
 - c) Normaal
 - d) Cauchy
- 5) Gegeven een dichtheidsverdeling, wat is de kans dat $P(x=1)$?
→ 0 (x4)
(ik had 0,25 (4x) :(?) --> bij continue variabelen is de kans op één bepaalde waarde meestal (altijd?) 0
- 6) Histogram was niet unimodaal (x7) want er waren 2 pieken Er was er maar 1
geen histogram 3x Vrij zeker want er werd met percentages gewerkt

Bewijs: Ongelijkheid van Markov voor positieve continue toevalsveranderlijke (4p)

Oefeningen

- 1) Bedrijf gebruikt twee machines voor maken van koekjes. Machine A maakt 60% van de koekjes, machine B 40%. De koekjes worden per paar afgeleverd en in dozen gestopt van 10 koekjes. (Dus elke machine maakt koekjes per twee en er passen 5 paar in een doos) Er is per ongeluk zout gebruikt ipv suiker bij machine B. Een klant proeft 5 koekjes uit zijn doos van 10 waarvan er 3 zout zijn en 2 goed. Wat is de kans dat er 4 paar zoute koekjes in de doos zaten?
+Hint: werk in de marginale verdelingen met paren koekjes en voor de conditionele verdelingen per koekje
→ Ik had 0,0816.... (x4)

Berekening:

B= aantal koekjes van B

T= je neemt 5 koekjes uit een doos van 10 koekjes en 3 zijn niet eetbaar (dus B) en 2 zijn eetbaar dus van machine A

regel van Bayes

$$P(B = 8|T) = \frac{P(B=8) \cdot P(T|B=8)}{\sum_{i=0}^{10} P(B=i) \cdot P(T|B=i)}$$

$$P(B = 8) = P(X = 4) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^1 = 0,0768$$

X= aantal paren koekjes van machine B

$X \sim \text{Bin}(n=5; 0,4)$

$P(B = 1) = P(B = 3) = P(B = 5) = P(B = 7) = P(B = 9) = 0$ want steeds in paren in de doos

$P(B = 0) = P(B = 1) = P(B = 2) = P(B = 9) = P(B = 10)$ moet je in feite niet berekenen want die komen samen voor met $P(B = i) \cdot P(T|B = i) = 0$ voor $i = 0, 1, 2, 9, 10$

$$P(B = 6) = P(X = 3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,2304$$

$$P(B = 4) = P(X = 2) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,3456$$

$$P(T|B = 8) = \frac{\frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{2!}{2!0!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{2}{9}$$

$$P(T|B = 6) = \frac{\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{10}{21}$$

$$P(T|B = 4) = \frac{\frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{5}{21}$$

$$P(B = 8|T) = \frac{0,0768 \cdot \frac{2}{9}}{0,0768 \cdot \frac{2}{9} + 0,2304 \cdot \frac{10}{21} + 0,3456 \cdot \frac{5}{21}} = 0,0816 = 8,16\%$$

2) Aantal sets tussen speler A en B is maximum 5 en gerepresenteerd door S (= aantal gespeelde sets), aangezien ge er 3 nodig hebt om te winnen. Kans dat A de set wint is 0.6, kans dat B de set wint is 0.4

a. Wat is de kans dat ze 5 wedstrijden spelen?

Ik had $P(S=5) = P(X_A=5) + P(X_B=5)$ met X_A en X_B neg.-binomiaal verdeelde veranderlijken met $r=3$ en $p_A=0,6$ en $p_B=0,4$

→ gaf 0,2272 (x3)

b. Wat moet gelden om a te beantwoorden?

Onafhankelijkheid

kans op winst voor A en B moeten constant zijn gedurende de hele match

(x3)

c. Bereken $E[S]$ en $\text{Var}[S]$ met nieuwe gegevens dat $P(S=3)=0,37$

$P(S=4)=0,3654$ $P(S=5)=0,2646$

$E[S]=3,8946$ (6x)

$E(S) = 3 \cdot P(S = 3) + 4 \cdot P(S = 4) + 5 \cdot P(S = 5)$

$\text{Var}[S]=0,6235$

$$\text{var}(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = 3^2 \cdot P(S = 3) + 4^2 \cdot P(S = 4) + 5^2 \cdot P(S = 5) - 3,8946^2 = 0,6235$$

(X3)

- d. Duurtijd van een set is gamma verdeeld met $r=5$, $\lambda=10$, bereken de kans dat de wedstrijd langer duurt dan 2u.

$$T = \sum_{i=0}^S X_i$$

T= totale tijd

X_i = tijd voor set i $X_i \sim \text{Gamma}(r=5, \lambda=10)$

Via CLS: T benaderen met normaalverdeling met verwachte waarde $E[T]$ en variantie $\text{Var}[T]$

$$E[T] = E\left[\sum_{i=0}^S X_i\right] = E[S] \cdot E[X_i] = 3,8936 \cdot (6/10) = 2,33676$$

$$\text{Var}[T] = \text{Var}\left[\sum_{i=0}^S X_i\right] =$$

$$\text{var}[S] \cdot (E[X_i])^2 + E[S] \cdot \text{var}(X_i) = 0,6235 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 + 3,8946 \cdot \frac{6}{10^2} = 0,458136$$

(Stochastische sommen: formularium 13)

$$\begin{aligned} P(T > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{2 - E(T)}{\sqrt{\text{var}(T)}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{2 - 2,33676}{\sqrt{0,458136}}\right) = 1 - P(Z \leq -0,497534) \\ &= 1 - (1 - P(Z \leq 0,50)) = P(Z \leq 0,50) = 69,15\% \text{ (x5)} \end{aligned}$$