Examen DH45 Lineaire Optimalizatie (D. Goossens)

Vrijdag 29 januari 2010, 9 – 12u

Richtlijnen:

Er zijn 4 opgaven, daarna volgen blanco bladzijden die u kan gebruiken om te antwoorden.

Lees aandachtig de opgaven en schrijf duidelijk leesbaar.

Vermeld uw naam.

Rekenmachine is **niet** toegelaten.

Er is geen giscorrectie bij meerkeuzevragen.

Het examen duurt 3 uur.

VEEL SUCCES!

Formules:

$z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N$

$x_B = B^{-1} b - B^{-1} A_N X_N$

Opgave 1 (6 ptn)

Het bedrijf “Kees!” brengt drie soorten parfum op de markt: X, Y, en Z. Om deze parfums te kunnen maken, gebruikt het bedrijf een grondstof die het onbeperkt kan aankopen aan 5 €/liter. Elke liter aangekochte grondstof kan gebruikt worden voor de productie van stoffen A en B, die als tussenproduct dienen voor het maken van de parfums.

Meer precies kan elke liter grondstof verwerkt worden tot 200 ml. van A, mits een investering van 2 uur verwerkingstijd en 2 € verwerkingskosten, of tot 300 ml. van B, mits 2 uur verwerkingstijd en 4 € verwerkingskosten.

Twee productieprocessen zijn beschikbaar om de tussenproducten om te zetten in parfums. Proces 1 duurt 2 uur en vergt 200 ml. van A en 100 ml. van B. Het kost 1 € om dit proces uit te voeren. Elke keer dat proces 1 wordt uitgevoerd worden er 100 ml. van parfum X en 100 ml. vloeibaar afval geproduceerd. Proces 2 duurt 3 uur en vergt 200 ml. van B en 100 ml. van A. Dit proces produceert 100 ml. van parfum Y en 80 ml. vloeibaar afval. Proces 2 kost 7 € om uit te voeren.

“Kees!” kan gratis vloeibaar afval dumpen in de Zenne of het afval gebruiken om parfum Z te maken. De overheid legt beperkingen op en laat slechts toe 100 liter vloeibaar afval te dumpen per week. Het productieproces om parfum Z te maken vergt 1 uur verwerkingstijd en levert 100 ml. van parfum Z op. Daar staat tegenover dat er 50 ml. A, 200 ml. B, en 120 ml. vloeibaar afval verbruikt wordt. Bovendien kost dit productieproces 5€.

Wekelijks kan maximaal 500 liter X en 500 liter Y worden verkocht. De wekelijkse vraag naar parfum Z daarentegen is onbegrensd. Producten X en Y verkopen tegen respectievelijk 18€ en 23€ per 100 ml.; 100 ml. van parfum Z kan verkocht worden tegen 16€. Wekelijks zijn 6000 uren verwerkingstijd beschikbaar.

Formuleer een LO model dat de wekelijkse winst voor “Kees!” maximaliseert.

Vermeld duidelijk welke variabelen u gebruikt en waar ze precies voor staan!

Indien de opgave u dubbelzinnig of niet volledig duidelijk zou lijken, maak dan een redelijke veronderstelling die u toelaat verder te werken, en motiveer uw interpretatie/keuze.

Opgave 2 (3 ptn)

Los volgend probleem op met de twee-fasen methode.

min $2x_1 - x_2 - 3x_3$
zdd
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$
$2x_1 + x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 3$
$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$

Als er meerdere variabelen in aanmerking komen om in de basis te brengen, kies dan die variabele met de grootste coëfficiënt in de z-rij. Als er meerdere variabelen uit de basis genomen kunnen worden, kies dan die variabele x_i met de laagste index i.

Beantwoord nu volgende meerkeuzevragen (omcirkel het correcte antwoord).

Welk dictionair is het laatste dictionair van de eerste fase ?

a)

$w =$						x_0
$x_4 =$	1	$-1/3\ x_1$	$-2/3\ x_2$	$-1/3\ x_6$	$+4/3\ x_0$
$x_5 =$	3	$-2\ x_1$	$-\ x_2$		$+\ x_0$
$x_3 =$	1	$-2/3\ x_1$	$-1/3\ x_2$	$+1/3\ x_6$	$-1/3\ x_0$

b)

$w =$					$-\ x_0$
$x_4 =$	1	$-1/3\ x_1$	$-2/3\ x_2$	$-1/3\ x_6$	$+4/3\ x_0$
$x_5 =$	3	$-2\ x_1$	$-\ x_2$		$+\ x_0$
$x_3 =$	1	$-2/3\ x_1$	$-1/3\ x_2$	$+1/3\ x_6$	$-1/3\ x_0$

c)

$w =$					$-\ x_0$
$x_1 =$	3/2	$-1/2\ x_2$	$+3/2\ x_3$	$+1/2\ x_6$	$-1/2\ x_0$
$x_4 =$	1/2	$-1/2\ x_2$	$-1/2\ x_3$	$-1/2\ x_6$	$+3/2\ x_0$
$x_5 =$	0		$-3\ x_3$	$-\ x_6$	$+2\ x_0$

d)

$w =$					x_0
$x_1 =$	3/2	$-1/2\ x_2$	$+3/2\ x_3$	$+1/2\ x_6$	$-1/2\ x_0$
$x_4 =$	1/2	$-1/2\ x_2$	$-1/2\ x_3$	$-1/2\ x_6$	$+3/2\ x_0$
$x_5 =$	0		$-3\ x_3$	$-\ x_6$	$+2\ x_0$

e) Geen van bovenstaande

Welk dictionair is het laatste dictionair van de tweede fase?

a)

$z =$		$-x_1$	$-3x_4$	$-2x_6$
$x_2 =$	$3/2$	$-1/2\,x_1$	$-3/2x_4$	$-1/2\,x_6$
$x_5 =$	$3/2$	$-3/2\,x_1$	$+3/2\,x_4$	$+1/2\,x_6$
$x_3 =$	$1/2$	$-1/2x_1$	$+1/2x_4$	$+1/2x_6$

b)

$z =$	-1	$-8\,x_3$	$-4\,x_4$	$-3\,x_6$
$x_2 =$	1	$-x_3$	$-2\,x_4$	$-x_6$
$x_5 =$		$-3\,x_3$		$-x_6$
$x_1 =$	1	$+2\,x_3$	$+x_4$	$+x_6$

c)

$z =$	6	$-x_1$	$-4\,x_2$	$-3\,x_4$
$x_6 =$	3	$-x_1$	$-2\,x_2$	$-3\,x_4$
$x_5 =$	3	$-2\,x_1$	$-x_2$	
$x_3 =$	-2	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$

d)

$z =$	6	$-5\,x_1$	$-2\,x_2$	$-3\,x_4$
$x_6 =$	3	$-x_1$	$-2\,x_2$	$-3\,x_4$
$x_5 =$	3	$-2\,x_1$	$-x_2$	
$x_3 =$	2	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$

e) Geen van bovenstaande

Opgave 3 (8 ptn)

Beschouw onderstaande LINDO input:

```
max -4x1 + 4x2 +11x3
st
12x1 +4x2 + 10x3 < 10
-x1 + x2 +3x3 < 2
2x1 + 3x2 - x3 < 7
end
```

Oplossen leverde volgende output, die op een aantal plaatsen onvolledig gemaakt is (hetgeen er stond is vervangen door "…", gevolgd door een letter tussen haakjes).

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      8.000000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000          ...(A)
        X2         2.000000          ...(B)
        X3         0.000000          1.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         ...(C)            0.000000
        3)         0.000000          ...(D)
        4)         1.000000          ...(E)

 NO. ITERATIONS=       2

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       -4.000000         0.000000         ...(F)
       X2        4.000000         ...(G)           ...(H)
       X3       11.000000         ...(I)           ...(J)

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2       10.000000         INFINITY         2.000000
        3        2.000000         ...(K)            ...(L)
        4        7.000000         INFINITY         1.000000
```

Tenslotte is ook onderstaand laatste dictionair gegeven, waarvan de z-rij ontbreekt.

$z = \ldots$

$x_2 = 2 + x_1 - 3x_3 - x_5$

$x_4 = 2 - 16x_1 + 2x_3 + 4x_5$

$x_6 = 1 - 5x_1 + 10x_3 + 3x_5$

a. Vul de ontbrekende waarden (A) t.e.m. (L) aan in onderstaand rooster.

(A)	(B)	(C)	(D)
(E)	(F)	(G)	(H)
(I)	(J)	(K)	(L)

b. Heeft dit model meerdere optimale oplossingen? Indien ja, geef een omschrijving van alle optimale oplossingen. Indien nee, verklaar uw antwoord.

c. Stel dat een nieuwe variabele $q \geq 0$ aan het model wordt toegevoegd, met als doelfunctiecoëfficiënt 6, en technologische coëfficiënten 1, 1, en 2 in respectievelijk de 1ste, 2de en 3de beperking. Is de huidige basisoplossing dan nog steeds toelaatbaar en/of optimaal? Verklaar uw antwoord.

Opgave 4 (3 ptn)

Beschouw het volgende LO model:

$$\min 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

zdd

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0.$$

1. Stel de duaal op van dit model
2. Beschouw de volgende oplossing voor het gegeven model: $x_1 = 5/2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$
   a. Wat is de bijhorende duale oplossing?
   b. Toon aan of de voorgestelde oplossing voor het gegeven model al dan niet optimaal is.

Hint: maak gebruik van complementary slackness; ga niet simplexen.