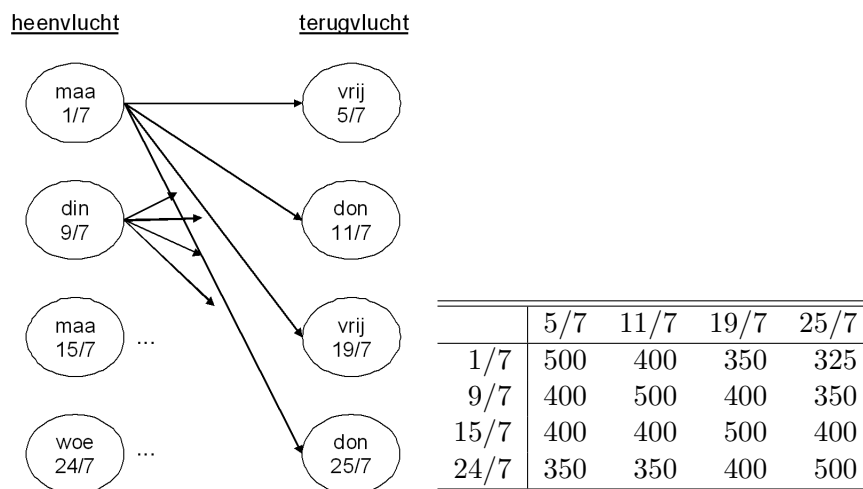


Extra oefeningen DT11

1. p.411 oef.27. Met de definitie van x_{ij} zoals gegeven in de probleem-beschrijving hebben we het toewijzingsprobleem voorgesteld door de volgende graaf; de tabel geeft de geassocieerde kosten van toewijzing weer.



Een optimale oplossing voor dit toewijzingsprobleem is $x_{13} = x_{24} = x_{31} = x_{42} = 1$ (waar de indexen de rangorde van heen-, resp. terugvlucht weergeven), alle andere beslissingsvariabelen = 0. Drie tickets kunnen dus worden gekocht aan 30% korting, en één aan 20% korting. Een totale kost van \$1450 is het resultaat. Vanzelfsprekend is voor de vlucht geselecteerd door x_{31} en x_{42} de *werkelijke* heenvlucht (wat het ticket betreft, alleszins), die vlucht die voor B. Fly een terugvlucht is.

2. p.502 oef.1. Stel

$$\begin{aligned} x_i &= 1 && \text{indien speler } i \text{ start} \\ &= 0 && \text{in het andere geval} \end{aligned}$$

Een gepaste IP-formulering is dan

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7$$

odb

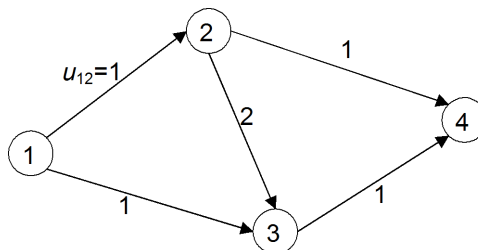
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 5 && (5 \text{ spelers}) \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &\geq 4 && (\text{guards}) \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 2 && (\text{forwards}) \\ x_2 + x_4 + x_6 &\geq 1 && (\text{center}) \\ \left(\frac{1}{5}\right) (3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7) &\geq 2 && (\text{BH}) \\ \left(\frac{1}{5}\right) (3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7) &\geq 2 && (\text{SH}) \\ \left(\frac{1}{5}\right) (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7) &\geq 2 && (\text{REB}) \\ x_6 + x_3 &\leq 1 && (\text{eis 3}) \\ x_4 + x_5 &\geq 2x_1 && (\text{eis 4}) \\ x_2 + x_3 &\geq 1 && (\text{eis 5}) \\ x_1, x_2, \dots, x_7 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Voor eis 4, bvb., hebben we de logische beperkingen

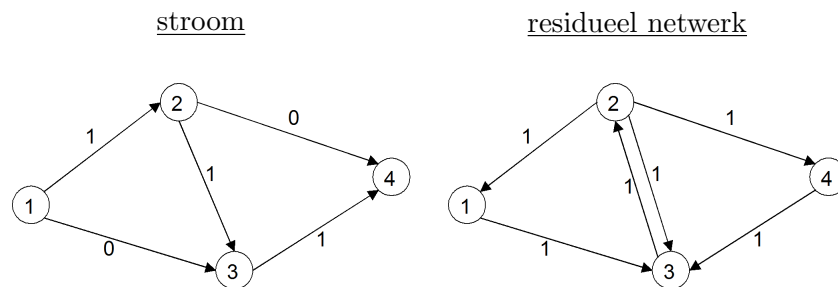
$$\begin{cases} x_1 = 1 & \Rightarrow & x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 = 0 & \Rightarrow & x_4 + x_5 \geq 0 \text{ (} x_4 \text{ en } x_5 \text{ vrij te bepalen)} \end{cases}$$

hetgeen inderdaad overeenstemt met wat in de vraagstelling voorkomt.

3. Construeer een maximum stroom doorheen het volgende netwerk aan de hand van het algoritme van Ford & Fulkerson. Initializeer het algoritme met nul-stroom. De getallen op de bogen (i, j) geven de capaciteiten u_{ij} weer.



De bedoeling van deze oefening is om het gebruik van voor- en achterwaartse pijlen te illustreren. Als alle pijlen worden geïnitieerd met stroom 0, dan zijn er verschillende mogelijke verbeterende paden in het residuele netwerk. Eén zo een pad is 1-2-3-4, waarover we een stroom van $\min\{1, 2, 1\}$ sturen. De resulterende stroom wordt hieronder links gegeven, het residuele netwerk (met residuele capaciteiten) rechts.



We nemen in het residuele netwerk de pijlen $(2,1)$ en $(4,3)$ op als achterwaartse pijlen: aangezien deze pijlen stroom dragen, geven de achterwaartse pijlen weer dat er stroom van kan worden weggenomen. $(3,2)$ is een achterwaartse pijl, en tegelijk komt $(2,3)$ ook voor als voorwaartse pijl: er kan nog één eenheid stroom extra over boog $(2,3)$ worden gestuurd, en er kan er ook één van worden weggenomen.

Het nut van de voor- en achterwaartse pijlen blijkt wanneer we voorgaande stroom (totale stroom van knooppunt 1 naar knooppunt 4 is 1) nog trachten te verbeteren: het enige pad van $1 \rightarrow 4$ in het residuele netwerk is 1-3-2-4 (waarover we 1 eenheid stroom sturen). Het resultaat is dat de stroom over $(1,3)$ en $(2,4)$ wordt verhoogd met 1, en dat we de éne eenheid stroom over $(2,3)$ terug wegnemen. Dit is het doel van de achterwaartse pijlen: zij maken een eerder gemaakte, minder interessante, beslissing (in casu stroom sturen over boog $(2,3)$) ongedaan. De totale stroom van 1 naar 4 stijgt van 1 naar 2.

De resulterende stroom (ten belope van 2) is optimaal: de volgende toepassing van het labelling-algoritme bereikt enkel knooppunt 1, en dat geeft ons de snede $[\{1\}, \{2, 3, 4\}] = \{(1,2), (1,3)\}$, die capaciteit 2 heeft (een *bovengrens*), en dit is een garantie van optimaliteit van de gevonden oplossing, die een *benedengrens* van 2 uitmaakt.