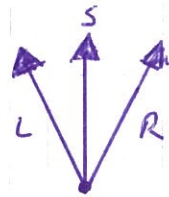


Oefeningen basis kansrekenen, reeks A

Oefening 1

a) $A = \{(R, R, R), (L, L, L), (S, S, S)\}$ ✓

b) $B = \{(R, L, S), (L, R, S), (S, L, R), (S, R, L), (R, S, L), (L, S, R)\}$ ✓



c) $C = \{(R, R, L), (R, R, S), (R, L, R), (R, S, R), (L, R, R), (S, R, R)\}$ ✓

d) $D = \{(R, R, L), (R, R, S), (R, L, R), (R, S, R), (L, R, R), (S, R, R), (L, L, R), (L, L, S), (L, R, L), (L, S, L), (L, R, L), (L, S, L), (S, S, R), (S, S, L), (S, R, S), (S, L, S), (L, S, S), (R, S, S)\}$ ✓

e) D' , betekent de verzameling van de gebeurtenissen waar bij er nooit exact 2 auto's in dezelfde richting in gaan. ✓

$D' = A \cap B$ ✓

$C \cap D$, betekent de verzameling van gebeurtenissen waarbij exact 2 auto's in dezelfde richting rijden = C . ✓

$C \cup D$, betekent de verzameling van gebeurtenissen waarbij exact 2 auto's in dezelfde richting rijden = D . ✓

Oefening 2

a) $\Omega = \{(S, S, S), (S, S, F), (S, F, S), (F, S, S), (F, F, S), (F, S, F), (S, F, F), (F, F, F)\}$ ✓

b) $A = \{(S, S, F), (S, F, S), (F, S, S)\}$ ✓

c) $B = \{(S, S, F), (S, F, S), (F, S, S), (S, S, S)\}$ ✓

d) $C = \{(S, F, S), (S, S, F), (S, S, S)\}$ ✓

e) $C' = \{(F, S, S), (F, S, F), (F, F, F), (F, F, S), (S, F, F)\}$ ✓

$A \cup C = \{(S, S, F), (S, F, S), (F, S, S), (S, S, S)\}$ ✓

$A \cap C = \{(S, F, S), (S, S, F)\}$ ✓

$B \cup C = \{(S, S, F), (S, F, S), (F, S, S), (S, S, S)\}$ ✓

$B \cap C = C$ ✓

Oefening 3

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,25 = 0,65$ ✓

b) $1 - P(A \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35$ ✓

c) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,25 = 0,65$ ✓

①

Oefening 4

- a) Er zijn nog andere werken die niet geklasseerd zijn als men of fictie, nl. ~~boek~~, cd's, tijdschriften, ...
- b) $P(\Omega \setminus A) = 1 - 0,35 = 0,65$ ✓
- c) $P(A \cup B) = 0,85$ ✓
- d) $1 - P(A \cup B) = 0,15$ ✓

Oefening 5

doos: $\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ N & N & N \\ 2 & 3 & 6 \\ W & W & W \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n=15$

Als er munten 2 keer genomen moet worden, betekent dit dat men sowieso 1 keer min.

De kans op minen de eerste keer dat men trekt is $P(M) = \frac{4+5}{15} = \frac{9}{15} = 60\%$.

Oefening 6

$$\begin{array}{ll} P(A) = 0,7 & P(A \cup B) = 0,85 \\ P(B) = 0,8 & P(A \cup C) = 0,90 \\ P(C) = 0,75 & P(B \cup C) = 0,95 \end{array} \quad P(A \cup B \cup C) = 0,98$$

- a) $P(A \cup B \cup C) = 0,98$
- b) $1 - P(A \cup B \cup C) = 0,02$
- c) $P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C) = 0,03$
- d) $(P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C)) + (P(A \cup B \cup C) - P(A \cup C)) + (P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B))$
 $= (0,98 - 0,95) + (0,98 - 0,90) + (0,98 - 0,85)$
 $= (0,03 + 0,08 + 0,13)$
 $= 0,24$

Oefening 7

- a) Munten 1 meisje = niet 'g' meisje.

stel allemaal jongen, dan krijg je van de eerste 3 afpr. volg. belangrijk, g herhalig

$$\frac{V_{3,4}}{V_{3,8}} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{\frac{8!}{(8-3)!}} = \frac{4!}{\frac{8!}{5!}} = 0,0714$$
$$1 - 0,0714 = 0,9286$$

b) alle meisjes approach → enkel jongens bij laatste drie

⇒ enkel jongens bij laatste drie hetzelfde als kam enkel jongens bij eerste 3. niet

$$= 0,0714.$$

c) Alle mogelijke volgorde: $8! = 40320$

kans op andere volgorde na de een.

$$\frac{40320 - 1}{40320} = 0,9999752$$

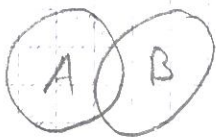
Oefening 8

a) De kans dat de persoon een mastercard heeft op voorwaarde dat hij een visa heeft heeft

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$$

b) De kans dat de persoon geen mastercard heeft op voorwaarde dat hij een visa heeft heeft

$$P(B'|A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$



$$= \frac{0,5 - 0,25}{0,5}$$

$$= 0,5$$

$$c) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625$$

$$d) P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0,4 - 0,25}{0,4} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375$$

$$e) P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,65} \approx 0,7692$$

Oefening 9

geg: $P(A_1) = 40\%$ ^{diesel}

$P(A_2) = 35\%$ ₉₅

$P(B|A_1) = 30\%$

$P(A_3) = 25\%$ ₉₈

$P(B|A_2) = 60\%$

$P(B|A_3) = 50\%$

a) $P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)}$

$\frac{0,35 \cdot 0,60}{0,4 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,5}$

$= \frac{0,21}{0,4 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,5}$

$= \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)}$

$= \frac{0,21}{0,12 + 0,21 + 0,125} = 0,462$

a) Super 95 en tank rol:

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

$= 0,35 \cdot 0,60 = 0,21$

b) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

$= 0,4 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,5$

$= 0,12 + 0,21 + 0,125 = 0,455$

c) $\times P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)}$

$= \frac{0,4 \cdot 0,30}{0,4 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,5}$

$= \frac{0,12}{0,4 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,5}$

$= 0,264$

$\times P(A_2|B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)}$

$= \frac{0,21}{0,12 + 0,21 + 0,125} = 0,462$

$\times P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)}$

$= \frac{0,125}{0,12 + 0,21 + 0,125} = 0,274$

Oefening 10

$$P(D) = 0,4$$

$$P(G|B) = 0,3$$

$$P(G|D) = 0,5$$

$$\text{gev: } P(D|G)$$

2 roestellen!

$$\begin{aligned} P(D|G) &= \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{P(D) \cdot P(G|D)}{P(D) \cdot P(G|D) + P(B) \cdot P(G|B)} \\ &= \frac{P(D) \cdot P(G|D)}{P(D) \cdot P(G|D) + P(B) \cdot P(G|B)} \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3} \quad \begin{matrix} \nearrow (1-0,4) \\ \nearrow 0,3 \end{matrix} \\ &= 0,526 \end{aligned}$$

Oefening 11

$$a) P(A \cap B \cap C) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,12$$

$$b) 1 - 0,12 = 0,88$$

$$c) P(A' \cap B' \cap C) = P(A') \cdot P(B') \cdot P(C) = 0,18$$

$$d) P(A' \cap B' \cap C) + P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') = 0,18 + 0,08 = 0,26$$

Oefeningen basis kan rekenen, lees B

Oefening 1

$$P(A_1) = 0,2 \quad P(A_2) = 0,1 \quad P(A_3) = ?$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = 0,01$$

$$P(A_3 | A_1 \cup A_2) = 0,3$$

$$\begin{aligned} (1) P(A_3) &= P(A_1') \cdot P(A_2') \cdot P(A_3 | A_1' \cap A_2') + P(A_1') \cdot P(A_2) \cdot P(A_3 | A_1' \cap A_2) \\ &\quad + P(A_1) \cdot P(A_2') \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2') + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,01 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 \\ &= 0,0852 = 8,52\% \end{aligned}$$

$$(2) P(\dots) = P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,1052$$

Oefening 2



$\boxed{2} \boxed{3}$ OF $\boxed{3} \boxed{2}$.

dan kans op harte 2 volgend op 3 of omgekeerd
 = kans op harte 2 na 3 + kans op harte 3 na 2.

$$= \frac{51 \cdot 50!}{52!} + \frac{51 \cdot 50!}{52!} = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Oefening 2

Neem een willekeurig gekhud loek kaarten,
 haat om dan de kaart harte 3 te zijn.

de kans dat achter deze kaart de harte
 harte 2 komt: $\frac{1}{52}$

of harte 2 voor: $\frac{1}{52}$ } $\therefore = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

Oefening 3

A = kans mt de zelfde verjaardag als Tar.
 $n = 23$.

$$1 - \left(\frac{364}{365} \right)^{23} = 1 - P(A) = 0,06$$

$$1 - \left(\frac{364}{365} \right)^n \geq 0,5$$

$$\left(\frac{364}{365} \right)^n \leq 0,5$$

$$n \log \frac{364}{365} \leq \log 0,5$$

< 0

$$\therefore n \geq \frac{\log 0,5}{\log \frac{364}{365}}$$

$$\therefore n \geq 253$$

Oefening 4

2 2 2 7 7

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{2}}{6^5} = 3,85\%$$

Oefening 5

P I E T.

26 bollen met letter alfabet

a) met terugleggen.

$$P(P \cap I \cap E \cap T)$$

$$= P(P) \cdot P(I|P) \cdot P(E|P \cap I) \cdot P(T|P \cap I \cap E)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{25}{26}\right)^7\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{25}{26}\right)^6\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{25}{26}\right)^5\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{25}{26}\right)^4\right)$$

= ...

b) zonder terugleggen

$$P(P \cap I \cap E \cap T)$$

$$= P(P) \cdot P(I|P) \cdot P(E|P \cap I) \cdot P(T|P \cap I \cap E)$$

$$P(P) = 1 - \left(\frac{25}{26} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{19}{20}\right)$$

$$P(I|P) = 1 - \left(\frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19}\right)$$

$$P(E|P \cap I) = 1 - \left(\frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18}\right)$$

$$P(T|P \cap I \cap E) = 1 - \left(\frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{16}{17}\right)$$

Oefening 6

• maak gebruik v. kettingregel!

• voor werking analoog als wat in boek
op

Oefening 7

Gebruik n het Ketsregel meth.

S_1 = spel 1 krijgt raar. S_2 = spel 3 krijgt raar.

S_2 = spel 2 krijgt raar. S_4 = spel 4 krijgt raar.

$$P(S) = P(S_1) \cdot P(S_2 | S_1) \cdot P(S_3 | S_1 \cap S_2) \cdot P(S_4 | S_1 \cap S_2 \cap S_3) \\ = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$$

$$P(S_1) \stackrel{\text{Lap.}}{=} \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot \frac{48}{36!12!}}{\frac{52!}{39!13!}} = 0,4388$$

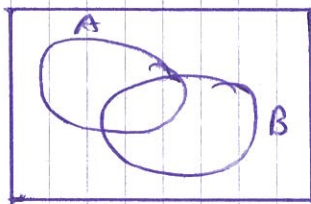
$$P(S_2 | S_1) \stackrel{\text{Lap.}}{=} \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{38}{12}}{\binom{39}{13}} = \frac{\frac{3 \cdot 36!}{12!24!}}{\frac{39!}{13!26!}} = 0,46213$$

$$P(S_3 | S_1 \cap S_2) \stackrel{\text{Lap.}}{=} \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} = \frac{2 \cdot \frac{24!}{12!12!}}{\frac{26!}{13!13!}} = 0,52$$

$$P(S_4 | S_1 \cap S_2 \cap S_3) \stackrel{L}{=} \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} = 1$$

$$P(S) = 0,1055$$

Oefening 8



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B | A') \cdot P(A') \\ = P(A) + P(A' \cap B) \\ = P(A) + P(B \setminus A) \\ = P(A \cup B)$$

② Mit Conditionen endop B da op E.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(\cancel{X|B}) + P \\ &= P(X|B) \cdot P(B) + P(X|B') \cdot P(B') \\ &= \end{aligned}$$

$$P(X|B) = (1 - P(E') \cdot P(D') \cdot P(F'))$$

$$\begin{aligned} P(X|B') &= P(X|B' \cap E) \cdot P(E) + P(X|B' \cap E') \cdot P(E') \\ &= [1 - P(A') \cdot P(C')] \cdot P(E) + P(E') \cdot (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= P(A) \cdot P(D) + P(C) \cdot P(F) - P(A \cap B \cap D \cap F) \\ &= \cancel{1 - (1 - P_A P_D)} (1 - (1 - P_C P_F)) \end{aligned}$$

$$P(X) = (1 - 0,01^3) \cdot 0,99 + 0,01 \left([1 - 0,01 \cdot 0,01] \cdot 0,99 + 0,01 \cdot [2 \cdot 0,99^2 - 0,99^4] \right)$$

Controlestrategieën

- Persoonlijke en gecentraliseerde controle
- Bureaucratische controle
- Controle via elektronische surveillance
- Output controle
- Human Resource Management controle
- Culturele controle

(box 5.2)

Defining 9

$$\begin{aligned} a) P(5) &= 1 - 10 \cdot (0,01)^2 \\ &= 1 - 10 \cdot 0,0001 \\ &= 0,999 = 99,9\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 - (1 - 0,99)^2)^{10} \\ &= 0,999 \end{aligned}$$

b) B kapot \rightarrow noch steeds licht

gebeurtenissen: $A = \text{lamp werkt}$
 $B = \text{lamp werkt}$
 $C = \text{lamp werkt}$
 $D = \text{lamp werkt}$
 $X = \text{er is licht}$

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|A) \cdot P(A) + P(X|A') \cdot P(A') \\ &= P(C \cup D) \cdot P(A) + P(B) \cdot P(D) \cdot P(A') \\ &= (P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D)) \cdot P(A) + P(B) \cdot P(D) \cdot P(A') \\ &= (0,99 \cdot 2 - 0,99^2) \cdot 0,99 + 0,99^2 \cdot 0,01 \\ &= 0,999702 \\ &= 99,9702\% \end{aligned}$$

c) We conditioneren op B, analoge als hierboven.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|B) P(B) + P(X|B') \cdot P(B') \\ &= [1 - P(D' \cap E' \cap F')] \cdot P(B) + \\ &\quad P(B') \cdot [P(E) \cdot P(X|E \cap B') + P(E') \cdot \underline{P(X|E' \cap B')}] \\ &= [1 - P(D' \cap E' \cap F')] \cdot P(B) + \\ &\quad P(B') [P(E) \cdot P(A \cup C) + P(E') \cdot (P(A \cap D) \cup (C \cap F)))] \\ &= [1 - P(D' \cap E' \cap F')] \cdot P(B) + P(B') [P(E) \cdot P(A \cup C) + P(E') \cdot *] \\ &\quad * = P(A \cap D) \cup (C \cap F) = P(A \cap D) + P(C \cap F) - P(A \cap D \cap C \cap F) \\ &\quad = P(A) \cdot P(D) + P(C) \cdot P(F) - P(A) \cdot P(D) \cdot P(C) \cdot P(F) \\ &\quad = 0,99 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,99 - 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,99 \\ &\quad = 2 \cdot 0,99^2 - 0,99^4 \\ &= [1 - 0,01^3] \cdot 0,99 + 0,01 (0,99 \cdot (0,99 + 0,99 - 0,99^4) + 0,01 (2 \cdot 0,99^2 - 0,99^4)) \\ &= 99,99979809\% \end{aligned}$$

Aufg. 10

A, B, C, D, E → Merkmale

X → System Werte

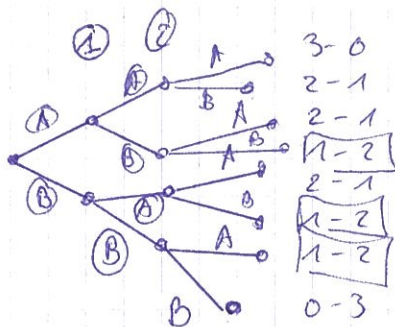
$$P(A|X') = \frac{P(X'|A) \cdot P(A)}{P(X'|A) \cdot P(A) + P(X'|A') \cdot P(A')} = (*)$$

$$P(X'|A) = P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(X'|A') = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) \cdot P(E) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,0048$$

$$(*) = \frac{0,12 \cdot 0,1}{0,12 \cdot 0,1 + 0,0048 \cdot 0,9} = 0,7353$$

Aufg. 11



$$P = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = 26,79\%$$

Aufg. 12

$$P(Z) = 0,065$$

$$P(Z|V) = 0,13$$

$$P(Z|V') = ?$$

$$P(Z) = P(Z|V) \cdot P(V) + P(Z|V') \cdot P(V')$$

$$0,065 = 0,13 \cdot 0,065 + P(Z|V') \cdot 0,935$$

$$\Rightarrow P(Z|V') = \frac{0,065 - 0,13 \cdot 0,065}{0,935} = 0,0605$$

Oefening 13

3W
7Z

Deo S I

6W
4Z

Deo S II

W!



A: Je trekt W uit door 1.

B: Je trekt Z uit door 2.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')}$$
$$= \frac{\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{10}} = 1/3.$$

Oefening 14

A: 2x kop en 2x munt gooien

B: munt 1 gooien

C: munt 2 gooien

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$
$$= \frac{0,6^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,5}{0,6^2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,7^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,5}$$
$$= 56,66\%$$

Oefening 15

* Gebeurtenissen:

V = het eerste muntstuk is vals.

A = twee of meer pogingen nodig om kop uit te komen met het tweede muntstuk.

T = 3 pogingen nodig om kop uit te komen met het eerste muntstuk.

$$\begin{aligned} * P(A|T) &= P(A|T, V) \cdot P(V|T) \\ &\quad + P(A|T, V') \cdot P(V'|T) \\ &= P(A|V) \cdot P(V|T) + P(A|V') \cdot P(V'|T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * P(A|V) &= 1 - P(A'|V) \quad (1 - P(1 \times \text{goalie in kop})) \\ &= 1 - 0,5 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

$$* P(V|T) = \frac{P(T|V) \cdot P(V)}{P(T|V) \cdot P(V) + P(T|V') \cdot P(V')} = 0,201278$$

$$\cdot P(T|V) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7$$

$$\cdot P(V) = 1/3$$

$$\cdot P(T|V') = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$\cdot P(V') = 2/3$$

$$\begin{aligned} * P(A|V') &= 1 - P(A'|V') \quad (1 - P(1 \times \text{goalie in kop})) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0,7 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \right) \quad \begin{array}{l} \nabla \frac{1}{2} \text{ kan op rechts} \\ \text{en } \frac{1}{2} \text{ kan op links} \end{array} \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$$* P(V'|T) = 1 - P(V|T) = 0,798722$$

$$\begin{aligned} * \text{Dan is } P(A|T) &= 0,5 \cdot 0,201278 + 0,4 \cdot 0,798722 \\ &= 0,4201278 \end{aligned}$$

Oefening 17

ZZ WW ZW

$Z_1 = 1$ tijde is kuart.

$$\begin{aligned} P(ZZ|Z_1) &= \frac{P(Z_1|ZZ) \cdot P(ZZ)}{P(Z_1)} \\ &= \frac{P(Z_1|ZZ) \cdot P(ZZ)}{P(Z_1|ZZ) \cdot P(ZZ) + P(Z_1|WW) \cdot P(WW) + P(Z_1|ZW) \cdot P(ZW)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Oefening 18

T = 1x ll hangen + 1x werken

A = 3x werken

E = werken

E' = nt werken = haperen

$$\begin{aligned} P(A|T) &= P(E|T) \cdot P(A|E \cap T) + P(E'|T) \cdot P(A|E' \cap T) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\times P(E|T) = P(T|E) \cdot P(E) \cdot \frac{1}{P(T)}$$

$$\begin{aligned} &= 0,001 \cdot 0,999 \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{0,001 \cdot 0,999 \cdot 0,9 + 0,98 \cdot 0,02 \cdot 0,1} \\ &= 0,3148. \end{aligned}$$

$$\times P(A|E \cap T) = P(A|E) = (0,999)^3 = 0,997.$$

$$\times P(E'|T) = 1 - P(E|T) = 1 - 0,3148.$$

$$\times P(A|E' \cap T) = P(A|E') = (0,98)^3 = \dots$$

Oefening 19

$$* P(A \cap B | A) = \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$* P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

* En nogem $P(A \cup B) \geq P(A)$ geldt het 1e deus

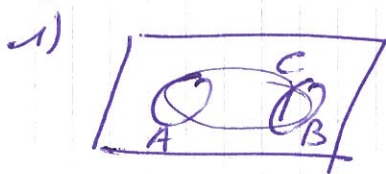
A = koopl.prijs, B = breed.prijs:

$$1) P(A \cap B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99}}{\frac{4}{100}} = \frac{1}{33}$$

$$2) P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99}}{\frac{4}{100} + \frac{4}{100} - \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99}} = \frac{1}{65}$$
$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

en zo geldt dus ook wat we wilt bewijzen hebben.

Oefening 21



$$P(A \cap B | C) \neq P(A | C) \cdot P(B | C)$$

Π Π

2) $A = \{4\}$

$B = \{1, 2, 4\}$

$C = \{1, 2, 4\}$

Defining 22

Geq : $P(A|B) = P(A|B')$

IB : $P(A|B) = P(A)$
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Bew : $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B') \cdot P(B')$
 $= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B) \cdot P(B')$
 $= P(A|B) (P(B) + P(B'))$
 $= P(A|B) (P(B) + 1 - P(B))$
 $= P(A|B) . \quad \text{QED .}$

(10)

(5)

2b. 1000
ha vers. len. 1-1.

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$X \sim \text{bin}\left(\frac{1}{10}, 5\right)$$

$$= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2$$

$$\frac{11}{10}$$

KLAADJE

$$P(X = m+m \mid X \geq m+1) \stackrel{TB}{=} P(X = m)$$

$$= \frac{P(X = m+m) \cap (X \geq m+1)}{P(X \geq m+1)}$$

$$= \frac{P(X = m+m)}{1 - P(X \leq m+1)}$$

$$= \frac{(1-p)^{m+m-1} \cdot p}{1 - F_X(m)}$$

$$= \frac{(1-p)^{m+m-1} \cdot p}{1 - (1 - (1-p)^m)}$$

$$= \frac{(1-p)^{m+m-1} \cdot p}{(1-p)^m}$$

$$= (1-p)^{m-1} \cdot p = P(X = m)$$

Aufgabe 22

andere manier

$$P(A|B) = P(A|B')$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{=} \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B'|A) \cdot P(A)}{P(B')}$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{=} \frac{P(B|A)}{P(B)} = \frac{1 - P(B'|A)}{1 - P(B')}$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{=} P(B|A) - P(B) \cdot P(B|A) = P(B) - P(B) \cdot P(B'|A)$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{=} P(B|A) = P(B) \Rightarrow \text{unabh.}$$

Oefeningen Toevalsveranderlijken, REEKS A.

Oefening 1

x = # mt. met geballen in Belg. postcode

postcode bestaat uit 4 cijfers. Niet is het 0000
dus

$$\begin{array}{rcll} - & - & - & - & \rightarrow & 4 = x \\ - & - & - & 0 & \rightarrow & 3 = x \\ - & - & 0 & 0 & \rightarrow & 2 = x \\ - & 0 & 0 & 0 & \rightarrow & 1 = x \end{array}$$

Oefening 2

experimenten met 2 mog. uitkomsten:

- kop / munt
- licht aan / uit
- nep of mt.

Oefening 3

$a, b \rightarrow D$
 $c, d \rightarrow C$

Oefening 4

$$\begin{aligned} a) P(X \leq 60) &= F_X(60) = 0,06 + 0,08 + 0,13 + 0,15 + 0,24 + 0,17 \\ &= 0,83 \end{aligned}$$

$$b) P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - 0,83 = 0,17$$

$$c) P(X \leq 59) = P(X \leq 60) - 0,17 = 0,66$$

$$d) P(X \leq 57) = 0,27$$

Oefening 5

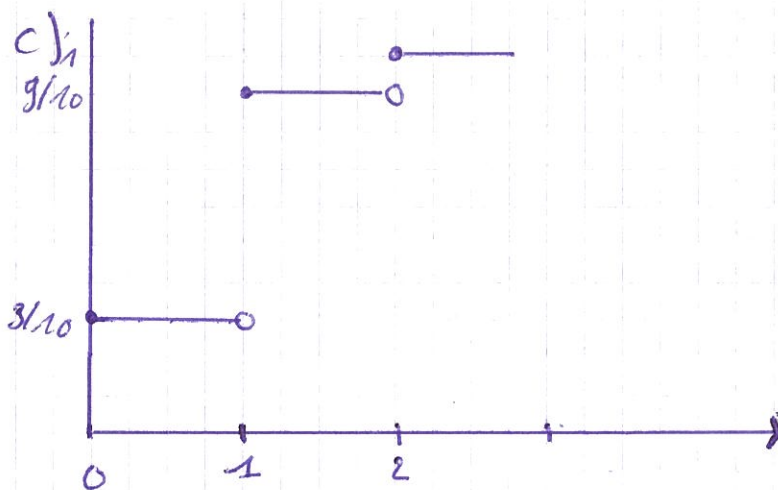
a) $\binom{5}{2} = 10$ mog. combo's, nl.

$\{(1, \underline{2}), (1, \underline{3}), (1, \underline{4}), (1, \underline{5}), (\underline{2}, 3), (\underline{2}, 4), (\underline{2}, \underline{5}),$
 $(\underline{3}, 4), (\underline{3}, \underline{5}), \quad, (4, \underline{5})\}$

$$b) p_X(0) = P(X=0) = \frac{3}{10}$$

$$p_X(1) = \frac{5}{10}$$

$$p_X(2) = \frac{1}{10}$$



Öefning 6

a) $p_Y(0) = 0$
 $p_Y(1) = 0$
 $p_Y(2) = 0,32$
 $p_Y(3) = 0,11$
 $p_Y(4) = 0,05$
 $p_Y(5) = 0$
 $p_Y(6) = 0,15$
 $p_Y(7 \text{ till } 11) = 0$
 $p_Y(12) = 0,37$

b) $P(2 < Y \leq 6) = F_Y(6) - F_Y(2)$
 $= 0,63 - 0,32 = 0,31$

$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y < 6)$
 $= 1 - 0,48$
 $= 0,52$



$P(Y \geq x)$

$1 - P(Y < x)$

Öefning 7

a) $E(Z) = \sum_x x \cdot p_Z(x)$
 $= 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,12 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,23 + 4 \cdot 0,10$
 $= 2,21$

b) $\text{Var}(Z) = E(X^2) - (E[X])^2$
 $= \sum_x x^2 \cdot p_Z(x) - \left(\sum_x x \cdot p_Z(x) \right)^2$
 $= 1^2 \cdot 0,12 + 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,23 + 4^2 \cdot 0,10 - (2,21)^2$
 $= 0,9059$

$\text{Var}(Z) = E[(Z - \mu_Z)^2]$

$= \sum_x (x - \mu_Z)^2 \cdot p_Z(x)$
 $= (0 - 2,21)^2 \cdot 0,05 + (1 - 2,21)^2 \cdot 0,12 + (2 - 2,21)^2 \cdot 0,5$
 $+ (3 - 2,21)^2 \cdot 0,23 + (4 - 2,21)^2 \cdot 0,1 = 0,9059$

$$c). \sigma = \sqrt{\text{var} z} = \sqrt{0,9059} \\ = 0,9518$$

$$d). \text{gemiddelde: } E[50Z] = 50 \cdot E[Z] \\ = 50 \cdot 2,21 \\ = 110,5$$

$$\begin{aligned} \text{var}(50Z) &= E[(50x)^2] - (E[50x])^2 \\ &= (50 \cdot 0)^2 \cdot 0,05 + (50 \cdot 1)^2 \cdot 0,12 + (50 \cdot 2)^2 \cdot 0,5 + (50 \cdot 3)^2 \cdot 0,13 \\ &\quad + (50 \cdot 4)^2 \cdot 0,10 - (2,21 \cdot 50)^2 \\ &= 2264,75 \end{aligned}$$

$$\text{Standaard afwijking} = \sqrt{\text{var}(z)} = 47,59.$$

Oefeningen toevalsveranderyke, REEK 5 B

Oefening 1

$$P(Y \leq y) = P(ax + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ als } a > 0.$$

$$P(Y \leq y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \frac{y-b}{a}} F(x) \text{ als } a < 0$$

↳ is de

$$= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

ongelijkheid

leest om,

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - F(X \leq x)$$

Oefening 2

Gev: G en F zijn cum. verd. functies.

$$\text{Bew: } 0 \leq G_X(x) \leq 1 \text{ en } 0 \leq F_X(x) \leq 1.$$

Neem nu beide ngt, en tel ze lid aan lid op volgens de formule $\lambda F_X(x) + (1-\lambda)G_X(x)$ met $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 0 \leq \lambda F_X(x) + (1-\lambda)G_X(x) \leq \lambda + (1-\lambda)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lambda F_X(x) + (1-\lambda)G_X(x) \leq 1.$$

⇒ meer een cumulatieve functie.

Oefening 3

gegeven is dat f en g dicht heet functies zijn
dan:

$$A) f_x(x) = F'_x(x)$$

$$g_x(x) = G'_x(x)$$

$$B) F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

$$G_x(x) = \int_{-\infty}^x g_x(x) dx$$

$$C) f_x(x) \geq 0$$

$$g_x(x) \geq 0.$$

*el A lid aan lid op volgen $\lambda f + (1-\lambda)g$:

$$\lambda f_x(x) = \lambda F'_x(x)$$

$$(1-\lambda)g_x(x) = (1-\lambda)G'_x(x)$$

$$\lambda f_x(x) + (1-\lambda)g_x(x) = \lambda F'_x(x) + (1-\lambda)G'_x(x)$$

$$\begin{aligned} * \int_{-\infty}^x \lambda f_x(x) + (1-\lambda)g_x(x) dx &= \lambda \int_{-\infty}^x f_x(x) dx + 1-\lambda \int_{-\infty}^x g_x(x) dx \\ &= \lambda F_x(x) + (1-\lambda)G_x(x) \quad ok. \end{aligned}$$

$$\infty \quad \lambda f_x(x) + (1-\lambda)g_x(x) \geq 0 \quad ok.$$

$$\begin{aligned} * \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f + (1-\lambda)g dx &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} g \\ &= \lambda \cdot 1 + 1(1-\lambda) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Übung 4



X ist das uniform Verteil
auf $[0, 1]$.

TO: $F(Y) = P(Y \leq y)$

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(F^{-1}(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F(y)) \\ &= F(y) \end{aligned}$$

Übung 5

dicht heiss funktion: $f_{+}(x) \geq 0 \quad \forall x$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{+}(x) dx = 1$

1) Als a par \Rightarrow dicht heiss funktion op $[1, \infty)$

$$\int_1^{+\infty} a x^{-b} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a \left[\frac{x^{-b+1}}{-b+1} \right]_1^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-b+1}}{-b+1} \right) - \frac{1}{-b+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-b}}{1-b} \right) - \frac{1}{1-b} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-b} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-b} - 1 \right) = 1$$

Als $b > 1$ $\leadsto 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{1-b} = 1 \quad \Leftrightarrow a = -(1-b)$$

$b \leq 1 \rightarrow$ nicht heiss

$$(2) f(x) = \begin{cases} ae^{-bx} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x? \quad \text{voldaan als } a \geq 0.$$

$$\int_0^{+\infty} ae^{-bx} dx = a \left[\frac{e^{-bx}}{-b} \right]_0^{+\infty}$$

$$\stackrel{M}{=} \frac{a}{-b} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-bx} - 1 \right)$$

$$\text{Als } b > 0$$

$$= \frac{a}{-b} (0 - 1)$$

$$= \frac{a}{b}$$

$$\text{Als } b \leq 0 \rightarrow \text{g.d.h.}$$

$$\text{dus } a = b.$$

$$(3) f(x) = ae^x(1+e^x)^{-2} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}.$$

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} e^x(1+e^x)^{-2} dx = a \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= a \int \frac{1}{u^2} du$$

$$\text{stel } (1+e^x) = u \\ du = e^x$$

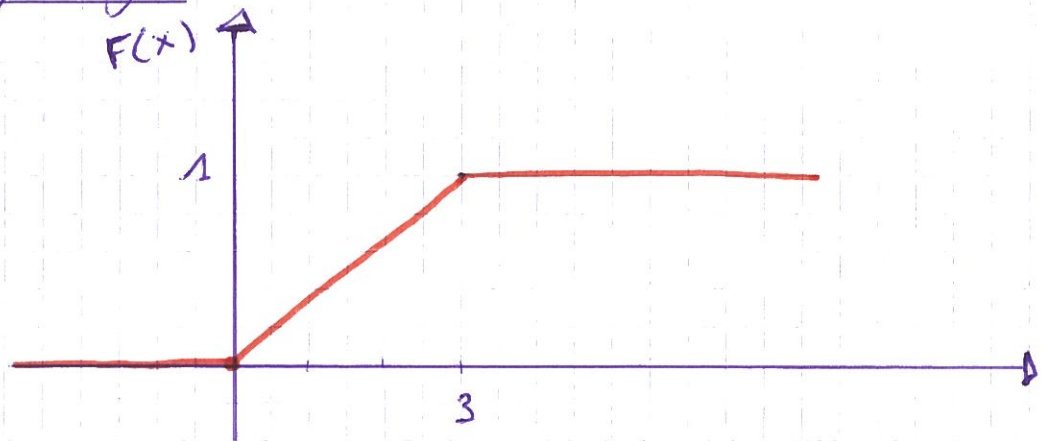
$$= a \left[-\frac{1}{u} \right]$$

$$= a \left[-\frac{1}{1+e^x} \right]_{-\infty}^{+\infty} \stackrel{M}{=} 1.$$

$$(=) a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1+e^x} \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{1+e^x} \right) \right)$$

$$(=) a = 1$$

Übung 6



$$\begin{aligned} 1) P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(Y \leq X) &= P(X^2 \leq X) \\ &= P(X \leq 1) \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) P(2 < X \leq 3) &= F(3) - F(2) \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) P(X \leq 3X^2) &= P(1 \leq 3X) \\ &= P\left(X \geq \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_0^3 x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

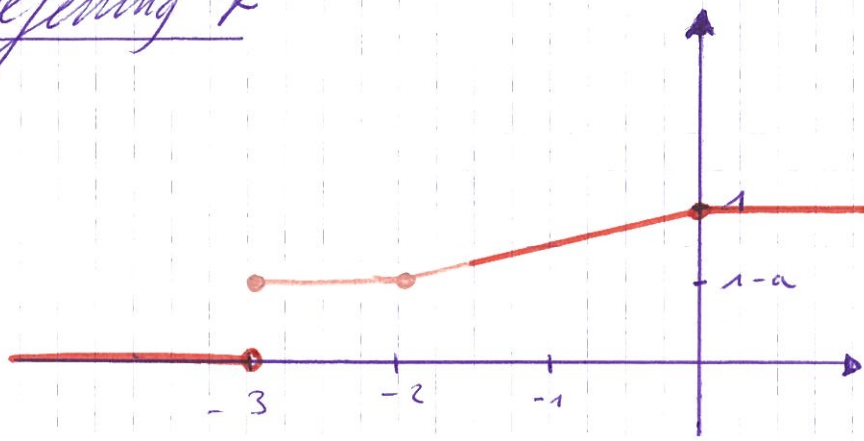
$$\begin{aligned}
 6) E[Y] &= E[X^2] \\
 &= \int_0^3 x^2 \frac{1}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{9} \cdot 27 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
 &= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 8) E[Y^2] - (E[Y])^2 \\
 &= E[X^4] - (E[X^2])^2 \\
 &= \int_0^3 x^4 \frac{1}{3} dx - \left(\int_0^3 x^2 \frac{1}{3} dx \right)^2 \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^3 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{3^5}{5} - \frac{3^3}{3} \right) = \frac{66}{5}
 \end{aligned}$$

Aufg. 7

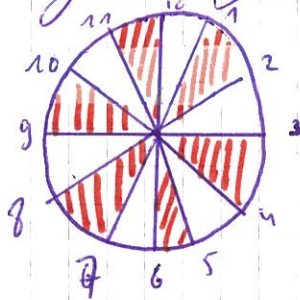


$$1) P(X = -3) = 1-a.$$

$$2) P(X = -2) = \frac{1}{2}(-2+2) \cdot a = 0.$$

$$\begin{aligned} 3) P(X \geq -1) &= 1 - P(X < -1) \\ &= 1 - \left(1-a + \frac{1}{2}(-1+2)a\right) \\ &= 1 - 1 + a - \frac{1}{2}(1)a \\ &= \frac{1}{2}a. \end{aligned}$$

Aufg. 8



with strikes, nur oben kein Limit

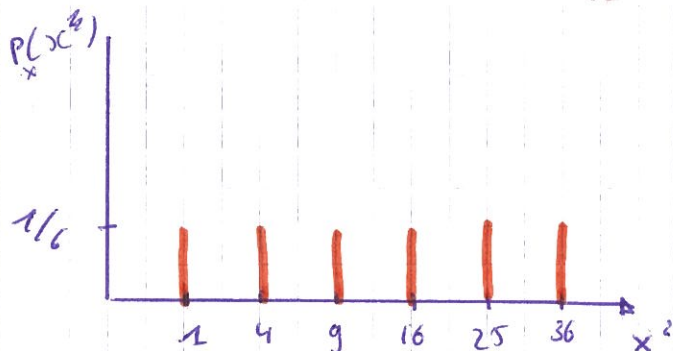
$$\begin{aligned} P(W \leq 5) &= P(5 \leq X \leq 10) + P(15 \leq X \leq 20) \\ &+ P(25 \leq X \leq 30) + P(35 \leq X \leq 40) + \\ &P(45 \leq X \leq 50) + P(55 \leq X \leq 60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F(10) - F(5) + F(20) - F(15) + F(30) - F(25) + F(40) - F(35) \\ &+ F(50) - F(45) + F(60) - F(55) \\ &= \frac{10}{60} - \frac{5}{60} + \frac{20}{60} - \frac{15}{60} + \frac{30}{60} - \frac{25}{60} + \frac{40}{60} - \frac{35}{60} + \frac{50}{60} \\ &\quad - \frac{45}{60} + \frac{60}{60} - \frac{55}{60} \\ &= \frac{30}{60} = 50\% \end{aligned}$$

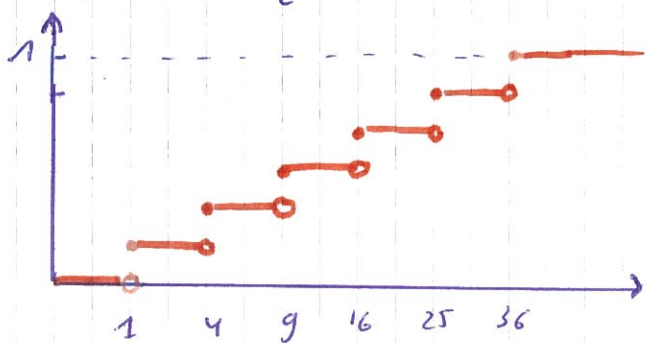
Oefening 1

X = kwadraat van #geroepen ogen op een eerlijke dobbelsteen

$$1) P(X = x^2) = p_X(x)$$



$$2) F_X(x) = \frac{1}{6}x \text{ met } x \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$



$$3) E[X] = \sum x \cdot p_X(x)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$$

$$= \frac{91}{6}$$

$$4) E[Y] = E[4X - 5] \stackrel{\text{lin}}{=} 4E[X] - 5$$

$$= 4 \cdot \frac{91}{6} - 5$$

$$= \frac{167}{3}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{1}{6} (1^2 + 4^2 + 9^2 + 16^2 + 25^2 + 36^2) - \left(\frac{91}{6}\right)^2$$

$$= \frac{2275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2$$

$$= \frac{5369}{36} = 149.13$$

Defining 10

(1) *hammar function:*

$$0 \leq P(X=x) \leq 1 \quad \forall x \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

→ OK.

$$\sum_x P_X(x) = 1$$

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1. \quad \rightarrow \text{OK.}$$

$$(2) E[X] = \sum_x x \cdot P_X(x)$$

$$= -1 \cdot \frac{4}{10} + 0 + 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10}$$

$$= 0$$

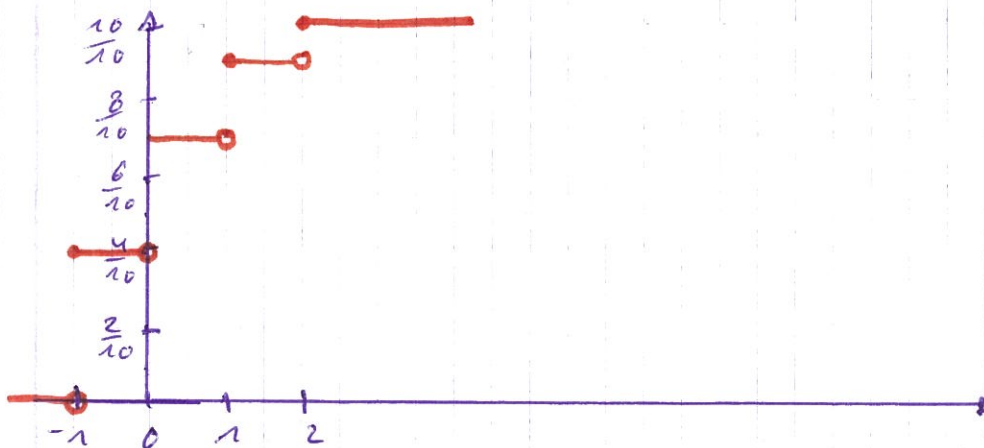
$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= (-1)^2 \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= 1.$$

$$\sigma_X = \sqrt{1} = 1.$$

$$3) P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x < -1 \\ \frac{4}{10} & \text{when } -1 \leq x < 0 \\ \frac{7}{10} & \text{when } 0 \leq x < 1 \\ \frac{9}{10} & \text{when } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{when } x \geq 2 \end{cases}$$



$$4) E[4X+5] = 4E[X] + 5$$

$$= -5$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$= E[(4X+5)^2] - (-5)^2$$

$$= E[16x^2 - 40x + 25] - 25$$

$$\text{Var}(X) = \sum_y (y - \mu_y)^2 \cdot p_x(y)$$

$$= \sum_x (4x - 5 + 5)^2 \cdot p_x(x)$$

$$= 16 \cdot \frac{4}{10} + 0 + 16 \cdot \frac{2}{10} + 64 \cdot \frac{1}{10}$$

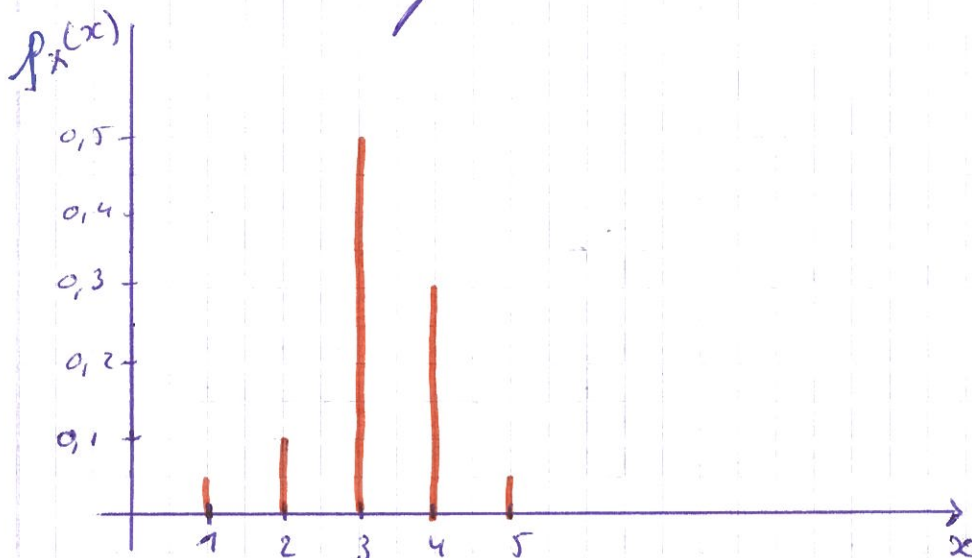
$$= 16 \left(\frac{6}{10} + \frac{4}{10} \right)$$

$$= 16$$

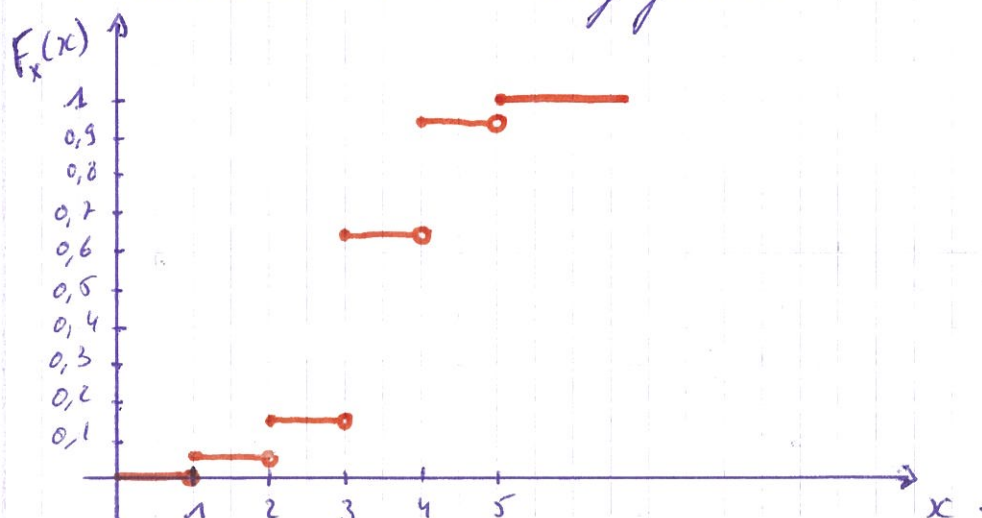
$$\sigma_y = \sqrt{\text{Var}(y)} = 4.$$

Oefening 11

1) * kansmassa functie



* cumulatieve verdelingsfunctie



$$\begin{aligned}
 2) \mu_1 &= E[X] = \sum_x x \cdot p_x(x) \\
 &= 1 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,05 \\
 &= 3,2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= E[X^2] = \sum_x x^2 \cdot p_x(x) \\
 &= 1^2 \cdot 0,05 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,05 \\
 &= 11.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E[X^3] = \sum_x x^3 \cdot p_x(x) \\
 &= 1^3 \cdot 0,05 + 2^3 \cdot 0,1 + 3^3 \cdot 0,5 + 4^3 \cdot 0,3 + 5^3 \cdot 0,05 \\
 &= 39,8
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}_1 = E[X - \mu_x] = E[X] - E[X] = 0$$

$$\tilde{\mu}_2 = E[(X - \mu_x)^2]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_x (x - \mu_x)^2 \cdot p_x(x) \\
 &= (1 - 3,2)^2 \cdot 0,05 + (2 - 3,2)^2 \cdot 0,1 + (3 - 3,2)^2 \cdot 0,5 \\
 &\quad + (4 - 3,2)^2 \cdot 0,3 + (5 - 3,2)^2 \cdot 0,05 \\
 &= 0,76
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}_3 &= E[(X - \mu_x)^3] \\
 &= \sum_x (x - \mu_x)^3 \cdot p_x(x) \\
 &= (1 - 3,2)^3 \cdot 0,05 + (2 - 3,2)^3 \cdot 0,1 + (3 - 3,2)^3 \cdot 0,5 \\
 &\quad + (4 - 3,2)^3 \cdot 0,3 + (5 - 3,2)^3 \cdot 0,05 \\
 &= -0,264
 \end{aligned}$$

$$3) \gamma = \frac{-0,264}{(0,76)^{3/2}} = -0,3985 < 0$$

link & leaf

Definier 12

analog a oef 1.1.

Oefening 13

$$1) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du.$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x$$

$$= [-e^{-\lambda t}]_0^x$$

$$= -(e^{-\lambda x} - 1)$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

voor $x \geq 0$

$$2) F_X(x) = \alpha$$

$$\Rightarrow F_X^{-1}(\alpha) = x$$

$$\Rightarrow x = Q_X(\alpha) \quad ? \text{ -n value}$$

$$1 - e^{-\lambda x} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\lambda x} = \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(1 - \alpha)}{-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow Q_X(\alpha) = - \frac{\ln(1 - \alpha)}{\lambda}$$

$$3) Q_X(0,5) = - \frac{\ln 0,5}{\lambda}$$

(median)

$$Q_X(0,25) = - \frac{\ln 0,75}{\lambda}$$

(onderkwartiel)

$$Q_X(0,75) = - \frac{\ln 0,25}{\lambda}$$

(bovenkwartiel)

Oefening 14

$$M_X(t) = 0,15 \cdot \frac{1}{0,15 - t}$$

voor $t < 0,15$

$$Y = 0,6X$$

$$(1) M_Y(t) = E[e^{tY}]$$

$$= E[e^{0,6tX}]$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} M_X(0,6t)$$

$$= 0,15 \cdot \frac{1}{0,15 - 0,6t}$$

$$(2) E[Y] = 0,6 \cdot E[X].$$

$$= 0,6 \cdot M'_X(0)$$

$$= \frac{0,6}{0,15} = 4.$$

2.1 Bijkomende oefeningen – Hoofdstuk 2

2.C.1 Een toevalsveranderlijke X heeft gemiddelde nul en variantie 9. Bereken met behulp van de Chebychev ongelijkheid een bovengrens voor $P(|X| \geq 15)$.

2.C.2 Een dobbelspel met één dobbelsteen gaat als volgt: als je 6 gooit win je 12€, als je 4 of 5 gooit win je 6€, als je 1, 2, of 3 gooit, betaal je zelf 7€.

1. Definieer een gepaste toevalsveranderlijke X .
2. Geef de kansmassafunctie van X .
3. Bereken het gemiddelde en de variantie van X .
4. Zou je dit spel meespelen?
5. Stel de momentgenererende functie van X op.
6. Gebruik de momentgenererende functie om opnieuw het gemiddelde en de variantie van X te berekenen.
7. Bereken het 40e moment van X via de momentgenererende functie.

Antwoorden

2.C.1 $1/25$

2.C.2

x	-7	6	12
$P(X = x)$	0.5	1/3	1/6

$$E(X) = 0.5, E(X^2) = 60.5, \text{Var}(X) = 60.25,$$

$$M_X(t) = e^{-7t\frac{1}{2}} + e^{6t\frac{1}{3}} + e^{12t\frac{1}{6}}; E(X^{40}) = (-7)^{40}\frac{1}{2} + 6^{40}\frac{1}{3} + 12^{40}\frac{1}{6}.$$

Bijkomstige oefeningen Hoofdstuk 2

Oefening 1

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 15) &= P(|X - 0| \geq d) \\ &= P(|X - 0| \geq n \cdot \sigma_x) \\ &\leq \frac{\sigma_x^2}{d^2} = \frac{9}{15^2} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= n \cdot \sigma_x \\ 15 &= 5 \cdot 3 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Oefening 2

1) $X \sim$ mintverlies dat je maakt.

$$2) P(X = -7) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 6) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 12) = \frac{1}{6}$$

$$3) E[X] = \frac{1}{2} \cdot (-7) + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 12$$

$$= 0,5$$

$$E[X^2] = (-7)^2 \cdot \frac{1}{2} + 6^2 \cdot \frac{1}{3} + 12^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{121}{2} = 60,5$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 60,5 - 0,5^2$$

$$= 60,25$$

4) Ja, de kans dat je iets winst is groter dan dat je iets verliest.

$$5) M_X(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \sum_x e^{tx} \cdot p(x)$$

$$= e^{-t7} \cdot \frac{1}{2} + e^{t6} \cdot \frac{1}{3} + e^{t12} \cdot \frac{1}{6}$$

$$gen = M_X'(0)$$

$$var = M_X''(0) - E[X]^2$$

$$= M_X''(0) - M_X'(0)^2$$

6) ~~40th~~ 40th moment:

$$E(X^{40}) = \sum_x x^{40} \cdot p(x)$$

$$= (-7)^{40} \cdot \frac{1}{2} + 6^{40} \cdot \frac{1}{3} + 12^{40} \cdot \frac{1}{6}$$

Oefeningen Kammoottellen Reeks A

Oefening 1

gegeven: 6 borden, 6 personen, 30 balletjes

$X \sim \text{binomiaal}(30, \frac{1}{6})$

$$a) P(X=0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = \left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

$$\begin{aligned} b) P(X=10) &= \binom{30}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \\ &= \frac{30!}{20!10!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \\ &= 0,012961 \end{aligned}$$

$$c) E[X] = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$$

Oefening 2

$X \sim \text{neg bin}(0,48; 2)$

$$\begin{aligned} a) P(X=5) &= \binom{5-1}{2-1} (1-0,48)^3 (0,48)^2 \\ &= 0,12958 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) P(X=3) &= \binom{3-1}{2-1} (1-0,48)^2 (0,48)^2 \\ &= 0,23961 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) P(X \leq 4) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \\ &\quad P(X=3) + P(X=4) \\ &= 0 + 0 + \binom{2-1}{2-1} (1-0,48)^0 (0,48)^2 \\ &\quad + \binom{3-1}{2-1} (1-0,48) (0,48)^2 \\ &\quad + \binom{4-1}{2-1} (1-0,48)^2 (0,48)^2 \\ &= 0,6564 \end{aligned}$$

$$d) E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,48} = 2,167$$

$$e) E[X] \cdot 0,54 = 2,167$$

Oefening 3

Auto: 5,5 € aut. 18 €

maandag mm: 200 voertuigen.

$$E[X] = 200 \cdot 0,55 \cdot 5,5 + 200 \cdot 0,45 \cdot 18$$

Oefening 4

$X \sim \text{hypergeometrisch}$

$$a) P(X=m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{11}{0}}{\binom{18}{5}} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{\frac{18!}{13! \cdot 5!}} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$\begin{aligned} M &= 7 \\ m &= 5 \\ N &= 18 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$b) P(X=0) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{11}{5}}{\binom{18}{5}} = 21 \cdot \frac{1}{\frac{18!}{13! \cdot 5!}} = \frac{1}{408} = 0,002451$$

$$\begin{aligned} M &= 7 \\ m &= 0 \\ N &= 18 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$= \frac{11}{204} = 0,5392$$

$$c) E[X] = \frac{n \cdot M}{N} = \frac{5 \cdot 7}{18} = 1,944$$

Aufg. 5

$$X \sim \text{Poisson}(3)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \leq 4) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &\quad + P(X=3) + P(X=4) \\ &= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot e^{-3} + \frac{1}{6} \cdot 27 \cdot e^{-3} \\ &\quad + \frac{1}{24} \cdot e^{-3} \cdot 3^4 \\ &= e^{-3} (1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375) \\ &= 16,375 \cdot e^{-3} \end{aligned}$$

Aufg. 6

$$\text{a) } P(Z \leq 1,8) = 0,9641$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(0,6 \leq Z \leq 1,8) &= P(Z \leq 1,8) - P(Z \leq 0,6) \\ &= 0,9641 - 0,7257 \\ &= 0,2384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(Z \geq 2,3) &= 1 - P(Z \leq 2,3) \\ &= 1 - 0,9893 = 0,0107 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(-2,5 \leq Z \leq 1) &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2,5) \\ &\stackrel{\text{sym}}{=} P(Z \leq 1) - P(Z \geq 2,5) \\ &= P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 2,5)) \\ &= 0,8413 - (1 - 0,9938) \\ &= 0,8351 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) P(Z \geq -1,6) &= 1 - P(Z \leq -1,6) \\
 &= 1 - P(Z \geq 1,6) \\
 &= 1 - (1 - P(Z \leq 1,6)) \\
 &= 1 - (1 - 0,9452) \\
 &= 0,9452.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) P(|Z| \leq 1,6) &= P(-1,6 \leq Z \leq 1,6) \\
 &= P(Z \leq 1,6) - P(Z \geq 1,6) \\
 &= P(Z \leq 1,6) - (1 - P(Z \leq 1,6)) \\
 &= 0,9452 - (1 - 0,9452) \\
 &= 0,8904
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) P(-3 \leq Z \leq -1) &= P(Z \leq -1) - P(Z \leq -3) \\
 &= (1 - P(Z \leq 1)) - (1 - P(Z \leq 3)) \\
 &= (1 - 0,8413) - (1 - 0,9987) \\
 &= 0,1574.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) P(Z \leq -2) &= P(Z \geq 2) \\
 &= 1 - P(Z \leq 2) \\
 &= 1 - 0,9772 \\
 &= 0,0228
 \end{aligned}$$

Defining Y

$$\begin{aligned}
 a) F_Z(Z \leq q) &= 0,9066 \\
 \Rightarrow q &= 1,32.
 \end{aligned}$$

$$b) P(Z > q) = 0,0052.$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(Z \leq q) = 0,0052$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow P(Z \leq q) &= 1 - 0,0052 \\
 \Rightarrow q &= 2,56.
 \end{aligned}$$

$$c) P(Z \leq q) = 0,3665 + 0,5 \\ = 0,8665.$$

$$\rightarrow q = 1,11$$

$$d) P(-q \leq Z \leq q) = 0,823$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq q) - P(Z \leq -q) = 0,823$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq q) - (1 - P(Z \leq q)) = 0,823$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq q) - 1 + P(Z \leq q) = 0,823$$

$$\Leftrightarrow 2 P(Z \leq q) = 1,823$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq q) = \frac{1,823}{2} = 0,9115.$$

$$\rightarrow q = 1,35$$

$$e) P(Z \leq q) = 0,2939$$

$$\Leftrightarrow P(Z \geq -q) = 0,2939$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(Z \leq -q) = 0,2939.$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq -q) = 1 - 0,2939 \\ = 0,7061.$$

$$\rightarrow q = \frac{0,54 + 0,55}{2} = 0,545.$$

$$\rightarrow q = -0,54$$

$$f) P(Z \leq 0) - P(Z \leq q) = 0,2939.$$

$$0,5 - P(Z \leq q) = 0,2939.$$

$$P(Z \leq q) = 0,5 - 0,2939 \\ = 0,2061.$$

$$P(Z \geq -q) = 0,2061$$

$$1 - P(Z \leq -q) = 0,2061$$

$$P(Z \leq -q) = 0,7939 \rightarrow -q = 0,82 \Leftrightarrow q = 0,82$$

Übung 8 (Aufg 104)

a) $2,65 = q$ Maximum $P(Z \leq q) = 1 - 0,004 = 0,9960$

b) $P(Z \leq q) = 1 - 0,025$
 $= 0,975$

$\rightarrow q = 1,96$

c) $P(Z \leq q) = 1 - 0,975$
 $= 0,025$

$\Leftrightarrow P(Z \geq q) = 0,025$

$\Leftrightarrow 1 - P(Z \leq -q) = 0,025$

$\Leftrightarrow P(Z \leq -q) = 0,975$

$-q = 1,96 \Leftrightarrow q = -1,96$

d) $P(Z \leq q) = 0,5$

$\rightarrow q = 0$

Übung 9

$\mu = 50$

$\text{Var}(X) = 16$

damit $\sigma = \sqrt{16} = 4$

a) $P(20 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 20)$
 $= P\left(Z \leq \frac{60-50}{4}\right) - P\left(Z \leq \frac{20-50}{4}\right)$
 $= P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -7,5)$
 $= 0,9938$ "
0

b) $P(X > 54) = 1 - P(X \leq 54)$
 $= 1 - P\left(Z \leq \frac{4}{4}\right)$
 $= 1 - 0,8413$
 $= 0,1587$

$$c) P(X \leq 36) = P\left(Z \leq \frac{36 - 50}{4}\right)$$

$$= P(Z \leq -3,5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 3,5) = 1 - 0,9998$$

$$= 0,0002$$

$$d) P(|X - 50| \leq 8)$$

$$= P(-8 \leq X - 50 \leq 8)$$

$$= P(42 \leq X \leq 58)$$

$$= P(X \leq 58) - P(X \leq 42)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{8}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{8}{4}\right)$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

$$= P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2))$$

$$= 0,9772 - (1 - 0,9772)$$

$$= 0,9544$$

Oefening 10

Geef alle gegevens om naar cm.

VROUW:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 166 \\ \sigma = 6,8 \end{array} \right\} X_v \sim N(166, 6,8^2)$$

MAN:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 178 \\ \sigma = 7,5 \end{array} \right\} X_m \sim N(178, 7,5^2)$$

$$a) P(X \geq 170) = 1 - P(X \leq 170)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{170 - 166}{6,8}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,588)$$

$$= 1 - 0,7224 = 0,2776$$

$$b) P(X \geq 190) = 1 - P(X \leq 190)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{190 - 166}{6,8}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 3,53)$$

$$= 1 - 0,9998 = 0,0002$$

Oefening 13

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$
$$a) F_T(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$$
$$= 0,9817$$

$$b) \int_2^{10} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} dt = 0,3611$$

$$c) P(X \geq t) = 0,01$$

$$\Rightarrow 1 - P(X \leq t) = 0,01$$

$$\Rightarrow P(X \leq t) = 0,99$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}t} = 0,99$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{1}{2}t} = -0,01$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}t} = 0,01$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}t = \ln(0,01)$$

$$\Rightarrow t = -2 \ln(0,01)$$

$$= 9,21 \text{ seconds}$$

Oefening 14

$$X \sim \text{gamma}(2, \lambda) \quad \lambda = 1$$

$$a) E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$b) E[1 \text{ lang}]$$

Oefening 15

$$X \sim \exp(\lambda = \frac{1}{3})$$

a) wegens geheugenloosheid maakt het nl uit of die nu de 5^e, de 37^e, of de 128^e klas

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$b) \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = 3$$

$$c) P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5) \\ = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 5}) \\ = e^{-5/3}$$

$$d) \int_1^6 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t} dt = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \\ = 0,5812.$$

$$e) 1 - e^{-\frac{1}{3}t} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{3}t} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}t = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -3 \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$Q_X\left(\frac{1}{4}\right) = 0,863$$

$$1 - e^{-\frac{1}{3}t} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{3}t} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}t = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -3 \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow Q_X\left(\frac{3}{4}\right) = 4,16$$

$$IQR = 4,16 - 0,86 = 3,2959$$

Oefening 16

$$X \sim \text{Weibull}(3, 15) \quad \beta = 3, \quad \sigma = 15.$$
$$a) F_X(20) = 1 - e^{-\left(\frac{20}{15}\right)^3} = 0,91$$

$$b) \alpha = 0,05.$$

$$\text{All } F_X(x) = 1 - 0,05.$$

$$F_X(x) = 0,95.$$

$$1 - e^{-\left(\frac{x}{15}\right)^3} = 0,95.$$

$$- \left(\frac{x}{15}\right)^3$$

$$e = 0,05$$

$$- \left(\frac{x}{15}\right)^3 = \ln 0,05.$$

$$x^3 = -15^3 \ln 0,05.$$

$$x = \sqrt[3]{-15^3 \ln 0,05}$$

$$= 21,62$$

Übung 17

$$a) \text{ für: } E[X] = \frac{7}{7+3} = \frac{7}{10}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{3 \cdot 7}{10^2 \cdot 11} = 0,019$$

$$b) \quad 3/10 = 1 - \frac{7}{10}$$

Oefeningen kansmodellen, Reeks B

Oefening 1

Minstens even goed: 4/5 successen of 5/5 successen.

$$X \sim \text{bin}(0,5)$$

$$P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \binom{5}{4} 0,5^4 \cdot 0,5 + \binom{5}{5} 0,5^5 \cdot 0,5^0$$

$$= \frac{5!}{4! \cdot 1!} 0,5^5 + 0,5^5$$

$$= 5 \cdot 0,5^5 + 0,5^5 = 0,1875 = \frac{6}{32}$$

Oefening 2

* Definieer de volgende gebeurtenissen:

A = 8 auto's wachten

T = bus rijdt voorbij $\Rightarrow t = 50s$

T' = bus rijdt mt voorbij $\Rightarrow t = 30s$

$$* P(T|A) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{P(A|T) \cdot P(T)}{P(A|T) \cdot P(T) + P(A|T') \cdot P(T')}$$

$$* P(T) = \frac{1}{20}$$

$$* P(T') = \frac{19}{20}$$

$$* P(A|T) = P(X=8)$$

$$X \sim \text{Poisson} \quad = \frac{e^{-10} \cdot 10^8}{8!}$$

$$= 0,1126$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \text{ (verkeersinten.)}$$

$$t = 30 + 20s$$

$$* P(A|T') = P(X=8)$$

$$= \frac{e^{-6} \cdot 6^8}{8!}$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \text{ (verkeersinten.)}$$

$$t = 30s$$

$$= 0,1033$$

$$* \text{Dan is } P(T|A) = 0,0543$$

Oefening 3

* Definieren eerst de volgende gebeurtenissen

B = man is Belg. = N

N = man is Nederlander.

T = er wordt gebruikt.

$$* P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|N) \cdot P(N)}{P(T|N) \cdot P(N) + P(T|B) \cdot P(B)}$$

$$* P(N) = P(B) = 0,5$$

$$* P(T|N) = ?$$

$$\mu = 185, \sigma = 10$$

"er wordt gebruikt en het is een Nederlander."

$$\begin{aligned} P(X \geq 175) &= 1 - P(X \leq 175) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{175 - 185}{10}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq -1) \\ &= 1 - P(1 - P(X \leq 1)) \\ &= P(X \leq 1) \\ &= 0,8413 \end{aligned}$$

$$* P(T|B) = ?$$

"er wordt gebruikt en het is een Belg."

$$\begin{aligned} P(X \geq 175) &= 1 - P(X \leq 175) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{175 - 175}{10}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0) \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

$$* P(N|T) = \frac{0,8413 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,8413 \cdot 0,5} = 0,627.$$

Oefening 4

* Definieer volgende gebeurtenissen:

A = lamp A steekt erin, $P(A) = 0,5$, $\mu_A = 1000$

B = lamp B steekt erin, $P(B) = 0,5$, $\mu_B = 500$

T = de lamp heeft al 1000 uren gebrand

X = de lamp brandt nog een 1000 uur extra.
(of langer)

* We moeten dus de P_X berekenen:

$$P(X=T) = P(A|T) \cdot P(X|T \cap A) + P(B|T) \cdot P(X|T \cap B)$$

* $P(A|T)$?

$$= \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B)}$$

• $P(T|A) = ?$

exponentiële verdel.

$$\mu_A = \frac{1}{\lambda_A} \Leftrightarrow 1000 = \frac{1}{\lambda_A} \Leftrightarrow \lambda_A = \frac{1}{1000}$$

$$1 - F_T(1000) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{1000} \cdot 1000}) = e^{-1}$$

• $P(T|B) = ?$

exponentiële verdel.

$$\mu_B = \frac{1}{\lambda_B} \Leftrightarrow 500 = \frac{1}{\lambda_B} \Leftrightarrow \lambda_B = \frac{1}{500}$$

$$1 - F_T(1000) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{500} \cdot 1000}) = e^{-2}$$

$$= \frac{e^{-1} \cdot 0,5}{e^{-1} \cdot 0,5 + e^{-2} \cdot 0,5} = \frac{e^{-1}}{e^{-1} + e^{-2}} = \frac{1}{1 + e^{-1}}$$

* $P(B|T)$?

$$= \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|A) \cdot P(A)} = \frac{e^{-2} \cdot 0,5}{e^{-2} \cdot 0,5 + e^{-1} \cdot 0,5} = \frac{1}{1 + e}$$

$$* P(X | T \cap A) = P(T | A) = e^{-1}$$

(vanwege de niet-slytage)

$$* P(X | T \cap B) = P(T | B) = e^{-2}$$

$$* P(X | T) = \frac{1}{1+e^{-1}} \cdot e^{-1} + \frac{1}{1+e^{-2}} \cdot e^{-2} = 0,3053$$

Oefening 5

Definieren:

T_A = effectieve levensduur lamp A.

T_B = " " " B

T_C = " " " C

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - P(A brandt \cap (B brandt \cup C brandt))$$

$$= 1 - P(T_A > t) \cdot (1 - P(T_B \leq t) P(T_C \leq t))$$

$$= 1 - (1 - P(T_A \leq t)) \cdot (1 - P(T_B \leq t) \cdot P(T_C \leq t))$$

$$= 1 - [e^{-\lambda t} \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda t})^2)]$$

$$= 1 - [e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2]$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - 2e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$$

$$= 1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$$

Oefening 6

* definieer voorwaart volg ende gebeurtenissen

$A_i = i$ dieren is / zijn dood

$T =$ gemerkte dier wordt weer aangekoffen.

* We zoeken $\sum_{i=1}^5 P(A_i | T)$, dit is hetzelfde als het een voudigere $1 - P(A_0 | T)$ Complementregel

* $P(A_0 | T) = ?$

$$= \frac{P(T | A_0) \cdot P(A_0)}{\sum_{i=0}^5 P(T | A_i) \cdot P(A_i)} = (*)$$

$A_i \sim \text{Bin}(\frac{9}{10}, 5)$ • $P(A_0) = \binom{5}{0} \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 0,59049$

• $P(A_1) = \binom{5}{1} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = \frac{5!}{4!1!} = 5 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,32805$

• $P(A_2) = \binom{5}{2} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,0729$

• $P(A_3) = \binom{5}{3} \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 0,0081$

• $P(A_4) = \binom{5}{4} \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = \frac{5!}{1!4!} = 5 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = 4,5 \cdot 10^{-5}$

• $P(A_5) = \binom{5}{5} \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5 = \frac{5!}{0!5!} = 1 \cdot 0,1^5 = 10^{-5}$

• $P(T | A_0) = \frac{1}{5}$

• $P(T | A_1) = \frac{1}{4}$

• $P(T | A_2) = \frac{1}{3}$

• $P(T | A_3) = \frac{1}{2}$

• $P(T | A_4) = 1$

• $P(T | A_5) = 0$

$$(*) = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,59049}{\frac{1}{5} \cdot 0,59049 + \frac{1}{4} \cdot 0,32805 + \frac{1}{3} \cdot 0,0729 + \frac{1}{2} \cdot 0,0081 + \frac{1}{1} \cdot 4,5 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-5}}$$

$$= 0,5159$$

$$1 - 0,5159 = 0,4841$$

Oefening 7

* Definieren erst die folgenden Variablen / geb.
 X = duurs van de ziekte.

$$X_M \sim \text{normaal}(84, 28)$$

$$X_Z \sim \text{normaal}(141, 47)$$

T = medecijn is niet kaan. $\rightarrow T' \neq$ werkzaam.

* Met Koeken

$$P(T \mid 85 \leq X \leq 95) = \frac{P(85 \leq X_M \leq 95) \cdot P(T)}{P(85 \leq X_M \leq 95) \cdot P(T) + P(85 \leq X_Z \leq 95) \cdot P(T')}$$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{0,75 \cdot (P(X_M \leq 95) - P(X_M \leq 85))}{0,75(P(X_M \leq 95) - P(X_M \leq 85)) + 0,25(P(X_Z \leq 95) - P(X_Z \leq 85))} \end{aligned}$$

$$\cdot P(X_M \leq 95) = P\left(Z \leq \frac{95 - 84}{28}\right)$$

$$= P(Z \leq 0,39)$$

$$= 0,6517$$

$$\cdot P(X_M \leq 85) = P\left(Z \leq \frac{85 - 84}{28}\right)$$

$$= P(Z \leq 0,04)$$

$$= 0,5120$$

$$\cdot P(X_Z \leq 95) = P\left(Z \leq \frac{95 - 141}{47}\right)$$

$$= P(Z \leq -0,98)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,98)$$

$$= 1 - 0,8365$$

$$= 0,1635$$

$$\cdot P(X_Z \leq 85) = P\left(Z \leq \frac{85 - 141}{47}\right)$$

$$= P(Z \leq -1,19)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,19) = 0,117$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A} &= \frac{0,75 \cdot (0,6517 - 0,5120)}{0,75 \cdot (0,6517 - 0,5120) + 0,25 \cdot (0,1635 - 0,117)} \\
 &= 0,90
 \end{aligned}$$

Oefening 8

* definieer volgende gebeurtenissen.

A = hoge kwaliteit → overl = 21%

B = Zeer hoge kwaliteit → overl = 39%

C = Hoogste kwaliteit → overl = 53%

T = $\frac{2}{4}$ lampen stuk.

* Zoek nu: $P(C|T)$

$$P(C|T) = \frac{P(T|C) \cdot P(C)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) + P(T|C) \cdot P(C)}$$

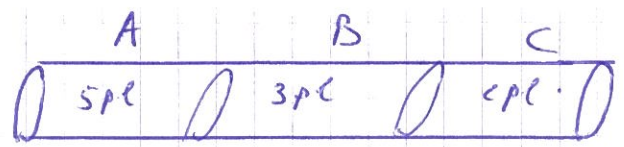
$$\begin{aligned}
 \cdot P(T|A) &= \binom{4}{2} \cdot 0,79^2 \cdot 0,21^2 && \text{binomiaal verol.} \\
 &= \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,79^2 \cdot 0,21^2 = 0,1651
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot P(T|B) &= \binom{4}{2} \cdot 0,61^2 \cdot 0,39^2 && \text{idem} \\
 &= \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,61^2 \cdot 0,39^2 = 0,3396
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot P(T|C) &= \binom{4}{2} \cdot 0,47^2 \cdot 0,53^2 && \text{idem} \\
 &= \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,47^2 \cdot 0,53^2 = 0,3723
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(C|T) &= \frac{0,3723 \cdot 0,20}{0,165 \cdot 0,50 + 0,3396 \cdot 0,30 + 0,3723 \cdot 0,20} \\
 &= 0,2877
 \end{aligned}$$

Oefening 9



* definieer volgende geb: $1,3 \text{ kn/pl}$ $2,1 \text{ kn/pl}$ $3,2 \text{ kn/pl}$.

A = plank komt uit onderele stuk.

B = plank komt uit middensele stuk.

C = plank komt uit bovensle stuk.

T = plank heeft 3 knoesten.

* we zoeken $P(C|T)$:

$$P(C|T) = \frac{P(T|C) \cdot P(C)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) + P(T|C) \cdot P(C)}$$

$$P(T|A) = \frac{e^{-1,3} \cdot 1,3^3}{3!} \quad \text{Poisson verd.}$$

$$= 0,0998$$

$$P(T|B) = \frac{e^{-2,1} \cdot 2,1^3}{3!}$$

$$= 0,1890$$

$$P(T|C) = \frac{e^{-3,2} \cdot 3,2^3}{3!}$$

$$= 0,2226$$

$$P(C|T) = \frac{0,2226 \cdot \frac{2}{10}}{0,0998 \cdot \frac{5}{10} + 0,1890 \cdot \frac{3}{10} + 0,2226 \cdot \frac{2}{10}}$$

$$= 0,2946$$

Oefening 10

* Aantal lekkende → poisson.

$$\lambda = \frac{1}{17}, \quad t = 26 \Rightarrow \mu = \frac{26}{17}$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\frac{26}{17}} \cdot \frac{26^0}{17}}{0!} = e^{-\frac{26}{17}} \approx 0,2167.$$

* Tijd tussen → exponential.

$$\begin{aligned} P(T > 26) &= 1 - P(T \leq 26) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{17} \cdot 26}) \\ &= e^{-\frac{26}{17}} = 0,2167. \end{aligned}$$

Oefening 14

$$X \sim \text{norm}(5, 0,5^2)$$

$$\frac{50}{10,50} = 0,0476 \cdot 10^2$$

~~0,0476~~

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{5 - 4,76}{0,5}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,48) \\ &= 0,3156. \end{aligned}$$

Oefening 12

* we passen hypergeometrische verdeling toe:

$$P(X=1) = \frac{\binom{100}{1} \binom{10^6-100}{9999}}{\binom{10^6}{10000}}$$

→ te moeilijke berekening \Rightarrow benaderen met bin.

* binominaal:

p op succes: $\frac{100}{10^6} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$

benaderen door binomiale want np is een 10000' bij

$$= \frac{100}{10^6 - 9999} \approx 0,001$$

$$n \cdot p = 10000 \cdot 0,0001 = 1 < 5 \Rightarrow \text{mt benaderen}$$

van door binominaal.

\Downarrow
poisson!

$$* P(X=1) = \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} = e^{-1} = 0,36$$

Oefening 13

$X = \# \text{ fouten} \sim \text{binomiaal} (N = 5,6 \cdot 10^9; p = 10^{-8})$

- N is zeer groot en $N \cdot p > 5 \Rightarrow$ normale benadering is toegestaan

#CLS



- Bereken gemiddelde en var:

$$\begin{aligned} E(X) &= N \cdot p = 5,6 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \\ &= 56 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = N \cdot p \cdot (1-p) \approx 56$$

! continuïteitscorrectie !

$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= 1 - P(Z \leq 79,5) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{79,5 - 56}{\sqrt{56}}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 3,14) \\ &= 1 - 0,9992 \\ &= 0,0008 \end{aligned}$$

Oefening 19

A = kapot in eerste 17 uur

A' = nt kapot in eerste 17 uur.

T = 19 afkeuringen na 17 uur.

$$P(A|T) = \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|A') \cdot P(A')}$$

• $P(T|A) \rightarrow$ poisson verdeeld: $X_1 \sim \text{pois}(\lambda = 10 \text{ per uur})$

$$P(X_1 = 19) = \frac{e^{-20} \cdot 20^{19}}{19!}$$
$$= 0,0888$$

• $P(T|A') \rightarrow$ poisson verdeeld: $X_2 \sim \text{pois}(\lambda = 7 \text{ per uur})$

$$P(X_2 = 19) = \frac{e^{-14} \cdot 14^{19}}{19!}$$
$$= 0,04085$$

• $P(A) \rightarrow T_1 \sim \text{exp}(\lambda = \frac{1}{100})$

$$P(T \leq 17) = F_T(17) = 1 - e^{-\frac{100}{1} \cdot 17}$$
$$= 0,1563$$

• $P(A') = 1 - P(A)$

$$= 1 - 0,1563 = 0,84367$$

$$P(A|T) = \frac{0,0888 \cdot 0,1563}{0,0888 \cdot 0,1563 + 0,4085 \cdot 0,84367} = 0,287$$

Oefening 15

mach

ommankeuringheid

aanded' in pool.

(A)

2%

0,4

(B)

1%

0,3

(C)

0,5%

0,3

A = afkomstig van A.

B = afkomstig van B.

C = afkomstig van C.

T = lot van 100st: 3 asterik

$$P(A|T) = \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) + P(T|C) \cdot P(C)}$$

$$P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) + P(T|C) \cdot P(C)$$

$$\begin{aligned} \cdot P(T|A) &= \binom{100}{3} \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{97} & (X_n \sim \text{bin}(100, 0,2)) \\ &= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{97} \end{aligned}$$

$$= 0,1823$$

$$\begin{aligned} \cdot P(T|B) &= \binom{100}{3} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{97} \\ &= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{97} \end{aligned}$$

$$= 0,060999$$

$$\begin{aligned} \cdot P(T|C) &= \binom{100}{3} \cdot 0,005^3 \cdot 0,995^{97} \\ &= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 0,005^3 \cdot 0,995^{97} \\ &= 0,01243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A|T) &= \frac{0,1823 \cdot 0,4}{0,1823 \cdot 0,4 + 0,0609 \cdot 0,3 + 0,01243 \cdot 0,3} \\ &= 0,7682 \end{aligned}$$

Oefening 16

T = 2 problemen gemeld.

A = slechts 1 gebruikt

B = 2 gebruiken

X = # gebruiken meldt probleem $\sim (\overset{1}{1}, \overset{0}{2})$
 $\mu = 2$.

$$* P(A|T) = \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B)}$$

$$* P(T|A) = 0,1$$

$$* P(T|B) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$$

$$* P(A) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1} = 2e^{-2}$$

$$* P(B) = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 2e^{-2}$$

$$\Rightarrow P(A|T) = \frac{0,1 \cdot 2e^{-2}}{0,1 \cdot 2e^{-2} + 0,64 \cdot 2e^{-2}} \\ = 13,5\%$$

Oefening 17

$$P(X > 3000) = 0,4 \Leftrightarrow P(X \leq 3000) = 0,6$$

$$P\left(Z \leq \frac{3000 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{3000 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) = 0,6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3000 - \mu}{\sqrt{\mu}} = 0,255 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 3000^2 - 6000\mu + \mu^2 = 0,255^2 \cdot \mu$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 - 6000,065025 + 3000^2 = 0$$

$$D = (-6000,065025)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3000^2 = 780,30$$

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} 3013,99 \rightarrow (*) \text{ gaar uit de } \mu \\ 2986,06 \rightarrow \text{ juist antwoord} \end{cases}$$

3.1 Bijkomende oefeningen – Hoofdstuk 3

3.C.1 Gegeven is de dichtheidsfunctie van een toevalsveranderlijke X

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)} & \text{als } x > 1 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Bereken de dichtheidsfunctie van de toevalsveranderlijke $Y = X^2$

- (a) door eerst de cumulatieve verdeling $F_Y(y)$ op te stellen en deze af te leiden om de dichtheidsfunctie te verkrijgen,
- (b) door gebruik te maken van de formule voor een dichtheid van een getransformeerde toevalsveranderlijke.

3.C.2 Gegeven is een dichtheidsfunctie $f_X(x) = cx^2$ als $x \in [0, a]$ (met c een zekere positieve constante) en $f_X(x) = 0$ anders. Bereken de dichtheidsfunctie van $Y = X^3$. Ter controle kan je dit ook op twee manieren berekenen zoals in de bovenstaande opgave.

3.C.3 Toevalsveranderlijke X is uniform verdeeld op het interval $[0, 1]$. We nemen $Y = -\log(X)$. Bereken de dichtheidsfunctie van Y .

3.C.4 Voor de les biologie krijgen de studenten de huistaak om muggen te vangen en te analyseren. Ilse vangt 11 muggen onder een glazen stolp: 6 muggen van het type *aedes sticticus* (AS), 3 van het type *aedes vexans* (AV) en 2 van het type *aedes dorsalis* (AD). De *aedes sticticus* mug bijt gemiddeld 0.5 maal per uur, de *aedes vexans* 0.8 maal en de *aedes dorsalis* 1.1 maal. Op een bepaald moment valt de stolp helaas op de grond en gaan alle muggen vliegen. 's Nachts ontdekt ze dat er twee muggen haar kamer zijn kunnen binnendringen, maar ze slaagt er niet in om hen te vangen of hun soort te bepalen. Na 8 uur slapen telt Ilse dat ze 9 muggenbeten heeft.

Bereken de kans dat het gaat om één mug van het type *aedes sticticus* en één van het type *aedes dorsalis*. Je mag veronderstellen dat alle muggen bijten (of, dat Ilse allemaal vrouwtjesmuggen heeft gevangen).

3.C.5 Een zelfstandig bedrijf heeft een dagwinst X (uitgedrukt in 100en euros) welke een gamma verdeling volgt waarvan het gemiddelde gelijk is aan 10 en de variantie gelijk is aan 100. Tenminste, als niemand staakt. In het bedrijf zijn drie mensen tewerkgesteld. Per werknemer die staakt is er een procentuele afname van de dagwinst, dus de winst daalt met $1/3e$ per werknemer die niet komt opdagen, hetgeen betekent dat de winst gelijk is aan X als iedereen aan het werk is, de winst is $(2/3)X$ met één werknemer die staakt, ..., en de winst $= 0$ als iedereen staakt. Het is geweten dat er in België gemiddeld 20% van de werknemers staakt. Indien de effectieve dagwinst kleiner of gelijk is aan 12, bereken dan de kans dat er minstens 1 werknemer in dit bedrijf heeft gestaakt.

3.C.6 Een loket wordt afwisselend bediend door drie medewerkers. Het is geweten dat bediende A het snelst werkt: gemiddeld is een klant bediend in 3 minuten. Bij bediende B en C is dat respectievelijk 4 en 5 minuten. Alle bedieningstijden mag je exponentieel verdeeld veronderstellen. Bediende A is 42% van de tijd actief, B neemt 28% van de tijd voor zijn rekening en bediende C 30% van de tijd. Je komt aan in de lokettenzaal, en je ziet dat iemand wordt bediend. Als die klant na 5 minuten nog bezig is, hoe groot is dan de kans dat bediende A achter het loket zit?

Antwoorden

3.C.1

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{als } 0 < y \leq 1 \\ \frac{e^{-(\sqrt{y}-1)}}{4\sqrt{y}} & \text{als } y > 1 \end{cases}$$

3.C.2

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y \notin [0, a^3] \\ \frac{c}{3} & \text{als } y \in [0, a^3] \end{cases}$$

3.C.3 $f_Y(y) = e^{-y}$ als $y \geq 0$ en $f_Y(y) = 0$ anders.

3.C.4 0.1602

3.C.5 0.5411

3.C.6 0.2939

Bykomende oefening - Hoofdstuk 3

Oefening 1

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\&= P(X^2 \leq y) \\&= P(X \leq \sqrt{y}) \\&= F_X(\sqrt{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\&= \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dy} \\&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } y \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} - (\sqrt{y}-1) & \text{voor } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{voor } y > 1 \end{cases}$$

Oefening 2

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\&= P(X^3 \leq y) \\&= P(X \leq y^{1/3}) = F_X(y^{1/3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(y^{1/3})}{dy} \\&= f_X(y^{1/3}) \cdot \frac{1}{3 \cdot y^{2/3}}\end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} c \cdot y^{2/3} \cdot \frac{1}{3y^{2/3}} & 0 \leq y \leq a^3 = \frac{c}{3} \quad 0 \leq y \leq a^3 \\ 0 & \text{andere} \end{cases}$$

Oefening 3

$X \sim \text{uniform}(0, 1)$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{1-0} = 1, \quad \int_0^1 1 dx = 1$$

$$F(Y \leq y) = F(-\log X \leq y)$$

$$= F(\log X \geq -y)$$

$$= F(X \geq e^{-y})$$

$$= 1 - F(X \leq e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y})$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$= \frac{1 - F_X(e^{-y})}{dy}$$

$$= -f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y} \cdot (-1)$$

$$= e^{-y}$$

voor $y \geq 0$.

andern $f_Y(y) = 0$.

Oefening 3. B. 12

$$N = 1\,000\,000; \quad \# \text{Priz} = 100$$

* eenvoudige methode: hypergeometrische verdeling:

$$P(X=1) = \frac{\binom{10\,000}{1} \binom{10^6 - 10\,000}{0}}{\binom{10^6}{1}}$$

is te groot.

* Binomisch?

nee:

$$\mu = n \cdot p$$

$$\approx 10\,000 \cdot \frac{100}{10^6}$$

$$\approx 1 < 5$$

* Poisson v:

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} = e^{-1} = 0.3679$$

Oefening 3C 4

$$X_{AS} \sim \text{poisson} (\mu = 4)$$

$$X_{AV} \sim \text{poisson} (\mu = 6,4)$$

$$X_{AD} \sim \text{poisson} (\mu = 8,8)$$

$T = 9$ muggen beten.

$$P(AS, AD | T) = \frac{P(T | AS, AD) \cdot P(AS, AD)}{P(T | AS, AD) \cdot P(AS, AD) + P(T | AS, AV) \cdot P(AS, AV) + P(T | AV, AD) \cdot P(AV, AD) + P(T | AS, AS) \cdot P(AS, AS) + P(T | AV, AV) \cdot P(AV, AV) + P(T | AD, AD) \cdot P(AD, AD)}$$

$$\bullet P(T | AS, AD) = \frac{e^{-12,8} \cdot 9!}{12,8^9} = 0,070171$$

$\mu = 4 + 8,8$

$$\bullet P(T | AS, AV) = \frac{e^{-10,4} \cdot 9!}{10,4^9} = 0,11936$$

$$\bullet P(T | AV, AD) = \frac{e^{-15,2} \cdot 9!}{15,2^9} = 0,02989$$

$$\bullet P(T | AS, AS) = 0,12408$$

$$\bullet P(T | AV, AV) = 0,07017$$

$$\bullet P(T | AD, AD) = 0,01015$$

$$\bullet P(AS, AD) = \frac{\binom{6}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{0}}{\binom{11}{2}}$$

$$= \frac{\frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{2!}{1!1!}}{\frac{11!}{9!2!}} = \frac{12}{55}$$

$$\bullet P(AS, AV) = \frac{\binom{6}{1} \binom{3}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6 \cdot 3}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{12}{55}$$

$$\cdot P(AV, AD) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{6}{55}$$

$$\cdot P(AS, AS) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{3}{11}$$

$$\cdot P(AV, AV) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{3}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{3}{55}$$

$$\cdot P(AD, AD) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{1}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{1}{55}$$

$$P(AS, AD | T) = \frac{0,070171 \cdot \frac{12}{55}}{0,070171 \cdot \frac{12}{55} + 0,11936 \cdot \frac{18}{55} + 0,02989 \cdot \frac{6}{55} + 0,12408 \cdot \frac{3}{11} + 0,07017 \cdot \frac{3}{55} + 0,01015 \cdot \frac{1}{55}}$$

$$= 0,1602$$

Oefening 5

$$X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} = 10 \\ \frac{1}{\lambda^2} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \lambda = \frac{1}{10} \end{cases}$$

\Rightarrow we kunnen de cumulatieve
verdelingsfunctie van de
exponentiële gebruiken.

$$T = X \leq 12.$$

S_0 = Niemand slaakt

S_1 = 1 WN slaakt

S_2 = 2 WN slaaken

S_3 = 3 WN slaaken

"minstens 1 WN slaakt" $\rightarrow 1 - P(\text{geen WN slaakt})$

$1 - P(S_0 | T)$ is wat we zoeken. Nu is

$$P(S_0 | T) = \frac{P(T | S_0) \cdot P(S_0)}{P(T | S_0) \cdot P(S_0) + P(T | S_1) \cdot P(S_1) + P(T | S_2) \cdot P(S_2) + P(T | S_3) \cdot P(S_3)}.$$

$$* P(S_0) = \binom{3}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^3 = 0,512$$

$$* P(S_1) = \binom{3}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^2 = 0,384$$

$$* P(S_2) = \binom{3}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^1 = 0,096$$

$$* P(S_3) = \binom{3}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^0 = 0,008$$

$$* P(T | S_0) = P(X \leq 12 | S_0)$$

$$= P(X \leq 12)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 12}$$

$$= 0,6988$$

$$* P(T | S_1) = P(X \leq 12 | S_1)$$

$$= P\left(\frac{2}{3} X \leq 12\right)$$

$$= P(X \leq 18)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 18}$$

$$= 0,8347$$

$$\begin{aligned}
 * P(T|S_2) &= P\left(\frac{1}{3}X \leq 12\right) \\
 &= P(X \leq 36) \\
 &= 1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 36} \\
 &= 0,9727
 \end{aligned}$$

$$* P(T|S_3) = P(0 \leq 12) = 1$$

$$\begin{aligned}
 P(S_0|T) &= \frac{0,6988 \cdot 0,512}{0,6988 \cdot 0,512 + 0,384 \cdot 0,8347 \\
 &\quad + 0,096 \cdot 0,9727 + 1 \cdot 0,008} \\
 &= 0,4588
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - P(S_0|T) &= 1 - 0,4588 \\
 &= 0,5411
 \end{aligned}$$

Oefening 6

bediener	bedienings ^{netp} tijd	aandeel
(A)	$\lambda = \frac{1}{3}$ 3 min	0,42
(B)	$\lambda = \frac{1}{4}$ 4 min	0,28
(C)	$\lambda = \frac{1}{5}$ 5 min	0,30

$A =$ je \bar{n} geholpen door A
 $B =$ " " " B
 $C =$ " " " C

$T =$ na 5 min nog bezig.

$$P(A|T) = \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) + P(T|C) \cdot P(C)}$$

$$\begin{aligned}
 P(T|A) &= P(X > 5) \\
 &= 1 - P(X \leq 5) \\
 &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 5}) \\
 &= e^{-5/3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(T|B) &= P(X > 5) \\
 &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 5}) \\
 &= e^{-5/4}
 \end{aligned}$$

$$P(T|C) = e^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(A|T) &= \frac{e^{-5/3} \cdot 0,42}{e^{-5/3} \cdot 0,42 + e^{-5/4} \cdot 0,28 + e^{-1} \cdot 0,3} \\
 &= 0,2939
 \end{aligned}$$

Oefeningen Toevals vectoren, REEKS A

Oefening 1

$$a) P(X_1 \geq 3, X_2 \geq 2) = 0,008 + 0,004 = 0,012$$

$$b) F_{X_1, X_2}(2, 1) = P(X_1 \leq 2, X_2 \leq 1) \\ = 0,098 + 0,043 + 0,142 + 0,130 + 0,094 + 0,118 \\ = 0,625$$

$$c) P_{X_1}(x) = \sum_k P_{X_1, X_2}(x, x_k)$$

$$P_{X_1}(0) = 0,098 + 0,043 + 0,035 + 0,012 + 0,007 + 0,003 \\ = 0,198$$

$$P_{X_2}(0) = 0,098 + 0,142 + 0,094 + 0,062 + 2 \cdot 0,016 \\ = 0,433$$

(rest = beschutte werkplaats)

$$d) \text{ onafh: } f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_{X_1, X_2}(0,0) \neq f_{X_1}(0) \cdot f_{X_2}(0)$$

$$0,098 \neq 0,198 \cdot 0,433 = 0,085734$$

conclusie: nt onafhankelijk.

$$e) P_{X_1|X_2}(x_1 | x_2=2) = \frac{P_{X_1, X_2}(x_1, x_2=2)}{P_{X_2}(2)}$$

$$\text{voor } x_1=0: = \frac{P_{X_1, X_2}(0, 2)}{P_{X_2}(2)} = \frac{0,035}{0,161} = 0,2174$$

(rest = Beschutte werkplaats)

$$f) P_{X_2|X_1}(x_2 | x_1=y) \quad \text{met } y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$= \frac{P_{X_1, X_2}(y, x_2)}{P_{X_1}(y)}$$

$$\text{voor } x_1=2, x_2=3 = \frac{0,008}{0,287} = 0,02787$$

Oefening 2

a) voor x :

$$F_x(x) = F_{x,y}(x, \infty) \\ = 1 - e^{-x}$$

voor y :

$$F_y(y) = F_{x,y}(\infty, y) \\ = 1 - e^{-y}$$

$$b) \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = e^{-(x+y)}$$

$$c) \frac{\partial F_x}{\partial x} = e^{-x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = e^{-y}$$

d) x en y onafh?

onafh: $f_{x,y}(x,y) \stackrel{?}{=} f_x(x) \cdot f_y(y)$

$$e^{-x} \cdot e^{-y} \stackrel{?}{=} e^{-x} \cdot e^{-y} \quad \text{dus:}$$

Ja ze zijn onafh.

$$e) E(x) = 1$$

$$E(y) = 1$$

(zie exponentiële verdeling)

$$f) \text{var}(x) = 1$$

(idem)

$$\text{var}(y) = 1$$

$$g) \text{cov}(x_1, x_2) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$$

⚠: mt berekenen \Rightarrow ONAFHANKELIJK $\Rightarrow \text{cov} = 0$
gevolg $\rho_{x,y} = 0$

$$h) P(X|Y=y) = f_{x|y}(x|y)$$

$$= \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{f_x(x) \cdot f_y(y)}{f_y(y)}$$

Oefening 3

gegeven: X_1, \dots, X_m identiek onafhankelijk

$$E(X_i) = E(x_i) = \mu$$

$$\text{Var}(X_i) = \text{Var}(x_i) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{a) } E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(X_i) \\ &= \frac{1}{m} \cdot m \cdot \mu = \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{Var}(\bar{X}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) \\ &= \frac{1}{m^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(E(X)^2 \cdot \text{Var}(N) + E(N) \cdot \text{Var}(X) \right) \\ &= \frac{1}{m^2} (\mu^2 \cdot 0 + m \cdot \sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{m} \end{aligned}$$

Oefening 4

$T = T_{1M} + T_{2M} + T_{3M} + T_{4M} + T_{5M} + T_{1A} + T_{2A} \dots$
a) i) Definieren $T_M \sim \text{Uniform}(0, 10)$ s'morgens
 $T_A \sim \text{Uniform}(0, 15)$ s'avonds.
 T_M en T_A zijn onafh. om $\text{Corr}(T_M, T_A) = 0$.
ook voor de dag.

$$\begin{aligned} E[T] &= E[5T_M + 5T_A] \\ &= 5(E[T_M] + E[T_A]) \\ &= 5\left(\frac{0+10}{2} + \frac{0+15}{2}\right) \\ &= 5 \cdot \frac{25}{2} = 62,5 \text{ minuten} \end{aligned}$$

$\nabla T \neq 5T_M + 5T_A$
 $\text{want } T_1 \neq T_2 \neq T_3 \dots$

$$\text{ii) } \sigma = \sqrt{\text{Var}(T)}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= \text{Var}(5T_M + 5T_A) \\ &= 5 \text{Var}(T_M) + 5 \text{Var}(T_A) \\ &= 5 \cdot \frac{10^2}{12} + 5 \cdot \frac{15^2}{12} = 135,4 \\ \sigma &= \sqrt{135,4} = 11,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) E[T_A - T_M] &= 5 (E[T_A] - E[T_M]) \\
 &= 5 \left(\frac{15}{2} - \frac{10}{2} \right) \\
 &= 12,5 \text{ minuten}
 \end{aligned}$$

Oefening 5

?? a) $z = x + y$

$$\begin{aligned}
 x &\sim \exp(\lambda) \\
 y &\sim \exp(\lambda)
 \end{aligned}$$

Wie domain op formidam

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx$$

$f_x(x) = 0$
voor $x < 0$

$$= \int_{-\infty}^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$f_y(z-x) = 0$
voor $z-x < 0$
d.w.z. $x > z$

$$= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \left(x \Big|_0^z \right)$$

b) erlang met $R=2$.

! Oefening 6

- Speciaal geval: gegeven de bivariate normale verdeling, geldt dat onafhankelijkheid voortvloeit uit de ongecorruleerdheid (ΔA_{ij} is dan niet x_0)

Dus: om aan te tonen dat $x_1 - \rho x_2$ en x_2 onafhankelijk zijn, volstaat het aan te tonen dat $\text{Cov}(x_1 - \rho x_2, x_2) = 0$.

- Noem $Y = x_1 - \rho x_2$.
- $$\begin{aligned}\text{Cov}(Y, x_2) &= E(Y \cdot x_2) - \underbrace{E(Y) \cdot E(x_2)}_{=0 \text{ want } \mu_{x_2} = 0} \\ &= E((x_1 - \rho x_2) \cdot x_2) \\ &= E(x_1 x_2 - \rho x_2^2) \\ &= E(x_1 x_2) - \rho E(x_2^2) = \textcircled{*}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\text{Cov}(x_1, x_2) &= E(x_1 x_2) - \underbrace{E(x_1)E(x_2)}_{=0} \\ &= \rho \quad (\text{zie matrix})\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\text{Cov}(x_2, x_2) &= E(x_2 \cdot x_2) - \underbrace{E(x_2) \cdot E(x_2)}_{=0} \\ &= 1 \quad (\text{zie matrix})\end{aligned}$$
- $\textcircled{*} = \rho - \rho \cdot 1 = 0$.
- Hieruit kunnen we besluiten dat $x_1 - \rho x_2$ en x_2 onafhankelijk zijn.

Oefening 7 (nie p 148)

$$a) F_U(u) = P(U \leq u) \\ = [F_X(u)]^m$$

$$F_X = \int_0^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a}$$

$$= \left(\frac{u}{10}\right)^5$$

$$\text{voor } 0 \leq u \leq 10$$

$$= 1 \quad u > 10$$

$$= 0 \quad u < 0$$

b) Levert af van u :

$$\frac{\partial F_X}{\partial u} = \frac{5}{10^5} \cdot u^4 \\ = f_U(u)$$

$$\text{voor } 0 \leq u \leq 10$$

$$= 0 \quad u > 10$$

$$= 0 \quad u < 0$$

$$c) E[U] = 0 \cdot 0^0 + 1 \cdot \frac{5}{10^5} + \frac{80}{10^5}$$

$$+ 3 \cdot f(3) + 4 \cdot f(4) + 5 \cdot f(5)$$

$$+ \dots + 10 \cdot f(10)$$

$$= \int_0^{10} f(u) \cdot u \, du$$

Oefeningen Toevalsrekenen REEKS B

Oefening 1

* A_i = bendt in i dagen actief.

T = 20 inbraken in de laatste 5 dagen.

$$* P(A_0 | T) = 1 - P(A_0 | T)$$

$$* P(A_0 | T) = \frac{P(T | A_0) \cdot P(A_0)}{\sum_{i=0}^5 P(T | A_i) \cdot P(A_i)}$$

* $\boxed{P(A_i)}$ $X \sim \#$ actieve dagen \sim bendt.

$$\begin{aligned} \cdot P(A_0) &= P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{20}\right)^0 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^5 \\ &= \left(\frac{19}{20}\right)^5 \approx 0,77378 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(A_1) &= P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(\frac{19}{20}\right)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19^4}{20^4} \approx 0,2036 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(A_2) &= P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^3 \\ &= 10 \cdot \frac{1}{20^2} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^3 \\ &= 0,0214 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(A_3) &= P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^2 \\ &= 10 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^2 \\ &= 0,00113 \end{aligned}$$

$$\cdot P(A_4) = P(X=4) = 0,00002968$$

$$\cdot P(A_5) = P(X=5) = 0,0000003125$$

* $\boxed{P(T | A_i)}$ $Y \sim \text{poisson}(\mu_i = 3 \cdot 5 + 3i)$

$$P(T | A_0) = \frac{e^{-15} \cdot 15^{20}}{20!} \approx 0,04181$$

$$P(T | A_1) = \frac{e^{-18} \cdot 18^{20}}{20!} \approx 0,0798$$

$$P(T|A_2) = \frac{e^{-21} \cdot 21^{20}}{20!} = 0,0867$$

$$P(T|A_3) = \frac{e^{-24} \cdot 24^{20}}{20!} = 0,06238$$

$$P(T|A_4) = \frac{e^{-27} \cdot 27^{20}}{20!} = 0,03275$$

$$P(T|A_5) = \frac{e^{-30} \cdot 30^{20}}{20!} = 0,1341$$

$$1 - P(A_0|T) = 1 -$$

$$0,77378 \cdot 0,04181$$

$$0,77378 \cdot 0,04181 + 0,2036 \cdot 0,7984 + 0,0214 \cdot 0,08671$$

$$+ 0,00113 \cdot 0,06238 + 0,0002968 \cdot 0,03275$$

$$+ 0,0000003125 \cdot 0,01341$$

$$= 0,3598$$

Oefening 2

$$T_i \sim \exp\left(\lambda = \frac{1}{10}\right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{100} T_i$$

$$1) P(S_n \leq 900) = P\left(\sum_{i=1}^{n=100} T_i \leq 900\right)$$

↳ dit is een Erlang verdeling
met $n=100$ en $\lambda = \frac{1}{10}$.

Maar we hebben van de Erlang verdeling geen
cumulatieve verdelingsfunctie \Rightarrow CLS.
 \Rightarrow normale verdeling.

$$\mu = \frac{100}{1/10} = 1000$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(S_n)} = \sqrt{\frac{100}{1/100}} = 100$$

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{900 - 1000}{100}\right) &= P(Z \leq -1) \\ &= 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - 0,8413 \\ &= 0,1587 \end{aligned}$$

2) Merk op dat de exponentiële geheugenloos is.
we hoeven dus geen rekening te houden met de
bijdragsverdeling, enkel met het aantal nog
te voldoen taken:

$$\# \text{ taken} = 100 - 88 + 1 = 12.$$

$$\begin{aligned} E[T] &= E[12T_1] = 12 E[T_1] \\ &= 12 \cdot 10 = 120 \text{ min} \\ &= 2 \text{ uur.} \end{aligned}$$

Oefening 3

$N \sim \text{poisson} (\mu = 1000)$

klanten

$X_i \sim \text{normaal} (\mu = 20, \sigma = 10)$

bedrag gesprekend pp

$$E(N) = \text{var}(N) = 1000$$

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(X_i) \cdot E(N) \quad (\text{stoch. samen})$$
$$= 20 \cdot 1000 = 20000$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = (E(X_i))^2 \text{Var}(N) + E(N) \cdot \text{Var}(X) \quad (\text{form B})$$
$$= 20^2 \cdot 1000 + 1000 \cdot 10^2$$
$$= 500000$$

• we hebben nu alles om de CLS toe te passen:

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i \geq 21000\right)$$
$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq 21000\right)$$
$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{21000 - 20000}{\sqrt{500000}}\right)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1,414)$$
$$= 1 - 0,9207 = 7,93\%$$

Oefening 4

• $X \sim \text{Normal}(\mu_X = 3, \sigma_X^2 = 9)$

• $Y \sim \text{Normal}(\mu_Y = 5, \sigma_Y^2 = 4)$

• $\rho_{X,Y} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 3.\end{aligned}$$

• $P(4Y > 2X + 3)$

$$= 1 - P(4Y - 2X \leq 3)$$

$$= 1 - P(2Y - X \leq \frac{3}{2})$$

• we passen de CLS toe:

$$\begin{aligned}E(2Y - X) &= 2E[Y] - E[X] \\ &= 2 \cdot 5 - 3 \\ &= \textcircled{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(2Y - X) &= \overset{\text{stoch}}{\text{var}} 2^2 \text{Var}(Y) + (-1)^2 \text{Var}(X) \\ &\quad + 2 \cdot (2) \cdot (-1) \cdot \text{Cov}(X, Y) \\ &= 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot 3 \\ &= 25 - 12 = \textcircled{13}\end{aligned}$$

$$P(2Y - X \leq \frac{3}{2}) = P(Z \leq \frac{\frac{3}{2} - \textcircled{7}}{\sqrt{\textcircled{13}}})$$

$$= P(Z \leq -1,53)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,53)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1 - (1 - P(Z \leq 1,53)) &= P(Z \leq 1,53) \\ &= \frac{0,9370 + 0,9357}{2} \\ &= 0,93635 \approx 0,9364.\end{aligned}$$

Oefening 5

$N \sim \text{poisson} (\mu = 20 \text{ per minuut})$

$B_i \sim \text{normal} (\mu = 7 \text{ mm}, \sigma = 4 \text{ mm})$
 $\text{Var} = 16 \text{ mm}^2$

①. $P(\sum_{i=1}^N B_i > 190)$

$= 1 - P(\sum_{i=1}^N B_i \leq 190) \quad *$ #CLS

$E[\sum_{i=1}^N B_i] = E[B_i] \cdot E[N]$
 $= 7 \cdot 20 = 140$

$\text{Var}[\sum_{i=1}^N B_i] = E[B]^2 \cdot \text{Var}[N] + E[N] \cdot \text{Var}[B_i]$
 $= 7^2 \cdot 20 + 20 \cdot 16$
 $= 1300$

$* = 1 - P(Z \leq \frac{190 - 140}{\sqrt{1300}})$

$= 1 - P(Z \leq 1,39)$

$= 8,23\%$

ZIE
VOLG

②. kans op grote waarnemingen. Zeer waarschijnlijk
lognormal \rightarrow rechttoecheef.

$E(X) > \text{mediaan}$

$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

$\text{med}(X) = e^{\mu}$

$\sigma^2 > 0$

$\Rightarrow E(X) > \text{med}(X)$

(behouden onder transformatie
want $\text{med}(X) = \mu$

$\text{med}(e^X) = e^{\mu}$

③ ?

Oefening 5

1) $N \sim \text{poisson} (\mu=20)$ # onweersbuien

$R \sim \text{normaal} (\mu=7; \sigma=4)$

$W = \sum_{i=1}^N R_i$; bereken $P(W \geq 190)$, CLS!

$$\begin{aligned}\mu_W &= E[N] \cdot E[R] \\ &= 20 \cdot 7 = 140\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(W) &= E[R]^2 \cdot \text{Var}(N) + E[N] \cdot \text{Var}(R) \\ &= 7^2 \cdot 20 + 20 \cdot 4^2 \\ &= 1300\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(W \geq 190) &= 1 - P(W \leq 190) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{190 - 140}{\sqrt{1300}}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,39) \\ &= 1 - 0,9177 = 8,23\%\end{aligned}$$

2) De lognormale verdeling is een rechtscheve unimodale verdeling. Het gemiddelde is omhoog getrokken door de rechte staart aan de rechterkant.
 $\Rightarrow \text{GEM} > \text{MED}$.

• Laat om dit toch ook even numeriek uitwerken:

$$\begin{aligned}7 &= e^{\mu + \sigma^2/2} & \text{en} & & 4^2 &= (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2} \\ \Leftrightarrow 7 &= e^{\mu} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}} & \Leftrightarrow 4^2 &= e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{e^{\sigma^2/2}} &= e^{\mu} & \Leftrightarrow 4^2 &= e^{2\mu} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) \\ \Leftrightarrow \mu &= \ln\left(\frac{7}{e^{\sigma^2/2}}\right) & \Leftrightarrow 4^2 &= \left(\frac{7}{e^{\sigma^2/2}}\right)^2 (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) \\ & & \Leftrightarrow \frac{4^2}{7^2} &= \frac{1}{e^{\sigma^2}} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) \\ & & \Leftrightarrow \frac{4^2}{7^2} &= e^{\sigma^2} - 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{4^2}{7^2} + 1 = e^{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \ln \left(\frac{4^2}{7^2} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma = \ln \left(\left(\frac{4}{7} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \\ = 0,5316$$

$$\mu = 1,8046$$

Hiermee kunnen we de mediaan berekenen. Inderdaad, de mediaan is het 50% - kwantiel. Het 50% kwantiel van de normale verdeling met μ en σ^2 is gelijk aan μ . Het 50% kwantiel van de lognormale verdeling

$Y = \exp(X)$ is dan gelijk aan e^μ , want:

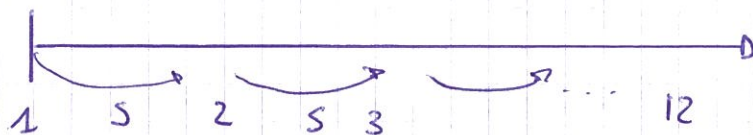
$$0,5 = P(X \leq \mu) = P(\exp(X) \leq \exp(\mu)) \\ = P(Y \leq e^\mu)$$

$$e^\mu = e^{1,8046} = 6,078$$

hieruit volgt dat $\underset{6,078}{\text{med}} < \underset{\frac{4}{7}}{\text{gem}}$. Dit laatste

resultaat levert eveneens een antwoord op de vraag 3.

Oefening 6



$P_i \sim$ geometrisch ($r=1, p=0,3$) # pogingen

Merk op dat deze verdienst gegeven loon is.

$N =$ totaal aantal resterende proeven: $12 - 3 + 1 = 10$.

$$E\left[\sum_{i=1}^N P_i\right] = E[N] \cdot E[P_i]$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{0,3}$$

$$= 33,33$$

↳ is het verwachte aantal resterende pogingen

$$\text{totaal} = 33,33 + 19 = 52,33$$

Oefening 7

$Y =$ water toevoer in reservoir

$X =$ hvdol meerlag.

$$E[Y|X=x] = ax = 10x$$

$$E[X] = 6$$

$$\text{Var}[Y|X=x] = bx^2 = x^2$$

$$\text{Var}[X] = 9$$

$$N = \# \text{ buis} = 20$$

$$\text{gev: } P\left(\sum_{i=1}^N Y_i \geq 1500\right)$$

* voor 1 buis:

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E[10X] = 10E[X] = 60$$

$$\text{Var}[Y] = E[\text{Var}(Y|X) + \text{Var}(E(Y|X))]$$

$$= E(bx^2) + \text{Var}(ax)$$

$$= b \cdot E[X^2] + a^2 \text{Var}(X)$$

$$= b(\text{Var}(X) + E(X)^2) + a^2 \text{Var}(X)$$

$$= b(9 + 6^2) + a^2 \cdot 9$$

$$= 9 + 6^2 + 10^2 \cdot 9 = 945$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E(X)^2$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \dots$$

* Noor 20 buien

$$E\left[\sum_{i=1}^N Y_i\right] = E(N) \cdot E(Y) = 20 \cdot 60 = 1200$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right) = 20 \cdot \text{Var}(Y) = 20 \cdot 945 = 18900$$

$$* P\left(\sum_{i=1}^N Y_i \geq 1500\right)$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{20} Y_i \leq 1500\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{1500 - 1200}{\sqrt{18900}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2,18)$$

$$= 1 - 0,9854$$

$$= 0,0146 = 1,46\%$$

Oefening 8

$$a) P(X \geq 1+t \mid X \geq t) \leq P(X \geq 1)$$

$$c) E[X] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{Var}[X] = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$W = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

$$P(W \geq 95) = 1 - P(W \leq 95)$$

$$E[W] = E[100] \cdot E[X] = 50\sqrt{\pi}$$

$$\text{Var}[W] = 100 \cdot \text{Var}(X) = 100 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P(W \leq 95) = P\left(Z \leq \frac{95 - 50\sqrt{\pi}}{\sqrt{100(1 - \frac{\pi}{4})}}\right)$$

$$= P(Z \leq 1,3766)$$

$$= 0,9162$$

$$1 - 0,9162 = 8,38\%$$

Oefening 9

$$X_1 \sim \text{normaal}(\mu=10, \sigma=1)$$

$$X_2 \sim \text{normaal}(\mu=9, \sigma=1)$$

hoeveelheid sap

• 4 N soort X_1 en 5 N soort X_2

• mogelijke combinaties (X_1, X_1) ; (X_1, X_2) ;
 (X_2, X_2)

• $T =$ glas loopt over $(\geq 21, 2)$

$$P(X_1, X_1 | T) = \frac{P(T | X_1, X_1) \cdot P(X_1, X_1)}{P(T | X_1, X_1) \cdot P(X_1, X_1) + P(T | X_1, X_2) \cdot P(X_1, X_2) + P(T | X_2, X_2) \cdot P(X_2, X_2)}$$

$$P(T | X_1, X_1) \quad X = X_1 + X_1$$

$$P(X \geq 21, 2)$$

$$E(X) = 2E(X_1) = 20$$

$$= 1 - P(X \leq 21, 2)$$

$$\text{Var}(X) = 2\text{Var}(X_1) = 2$$

$$= 1 - P\left(X \leq \frac{21,2 - 20}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1 - P(X \leq 0,85)$$

$$= 1 - 0,8023 = 0,1977$$

$$P(T | X_1, X_2) \quad X = X_1 + X_2$$

$$= P(X \geq 21, 2)$$

$$E(X) = 19$$

$$= 1 - P(X \leq 21, 2)$$

$$\text{Var}(X) = 2$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{21,2 - 19}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1 - P(X \leq 1,56)$$

$$= 1 - 0,9406$$

$$= 0,0594$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot P(T | X_1, X_2) \\
 &= 1 - P(X \leq 21, 2) \\
 &= 1 - P\left(Z \leq \frac{21,2 - 18}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= 1 - P(Z \leq 2,26) \\
 &= 1 - 0,9881 \\
 &= 0,0119
 \end{aligned}$$

$$X = X_1 + X_2$$

$$E(X) = 18$$

$$\text{Var}(X) = 1 + 1 = 2$$

$$\cdot P(X_1, X_1) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\cdot P(X_1, X_2) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{9}$$

$$\cdot P(X_2, X_2) = \frac{\binom{4}{0} \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}$$

$$P(X_1 X_1 | T) =$$

$$\frac{1}{6} \cdot 0,1977$$

$$\frac{1}{6} \cdot 0,1977 + \frac{5}{9} \cdot 0,0594 + \frac{5}{18} \cdot 0,0119$$

$$= 0,4757$$

Oefeningen Beschrijvende Statistiek

Oefening 1

$$a) \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 39 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 63 + 5 \cdot 69 + 6 \cdot 62 + 7 \cdot 51 + 8 \cdot 25 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 7}{4 + 8 + 39 + 55 + 63 + 69 + 62 + 51 + 25 + 10 + 7}$$

$$= 4,92875$$

b) aantal personen = $n = 4 + 8 + \dots + 7 = 393$ even.

we gaan dus op zoek naar het $\frac{393}{2}$ ste getal

c) 5

$$d) s^2 = \frac{1}{392} \sum_{i=1}^{393} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{392} \left[4 \cdot (0 - 4,92875)^2 + 8 \cdot (1 - \bar{x})^2 + 39 \cdot (2 - \bar{x})^2 + 55 \cdot (3 - \bar{x})^2 + \dots + 7 \cdot (10 - \bar{x})^2 \right]$$

$$= 4,301$$

$$\frac{1}{393} \sum_{i=1}^{393} (x_i - \bar{x})^3 = \frac{1}{393} \left[4 \cdot (0 - 4,92875)^3 + \dots \right] = 1,1514$$

$$\text{schefheid} = \frac{1,1514}{(4,301)^{3/2}} = 0,120 > 0$$

\Rightarrow Rechtsscheef

OPM:

vuistregel gem < med \Rightarrow linkscheef
is hier NIEt juist!
(conclusie: gebruik vuistregel voor
grafische besluiten, maar formule als
je cijfers hebt)

Oefening 2

a)

3	1
4	5 0 9
5	2 7 8 3 8
6	7 3 7 0 8 1 7 9 6 7 1
7	8 0 0 3 2 6 5 9 6 0 5 0
8	1 0 3 4

\Rightarrow

3	1
4	0 5 9
5	2 3 7 8 8
6	0 1 3 6 7 7 7 7 8 9
7	0 0 0 0 2 3 5 5 6 6 8 9
8	0 1 3 4



hoogte =

#el. in klasse

klassebreedte \times #obs.

hoogte balen?

$$h_{30-40} = \frac{2}{36 \cdot 10} = 0,0056$$

$$h_{40-50} = \frac{2}{36 \cdot 10} = 0,0056$$

$$h_{50-60} = \frac{6}{36 \cdot 10} = 0,017$$

$$h_{60-70} = \frac{14}{360} = 0,0389$$

$$h_{70-80} = \frac{9}{360} = 0,025$$

40 inclusief!

c) gemiddelde temperatuur =

$$\frac{67 + 52 + 78 + \dots + 49 + 84 + 31}{36} = 65,8611$$

$$med = Q_2 = 67,5$$

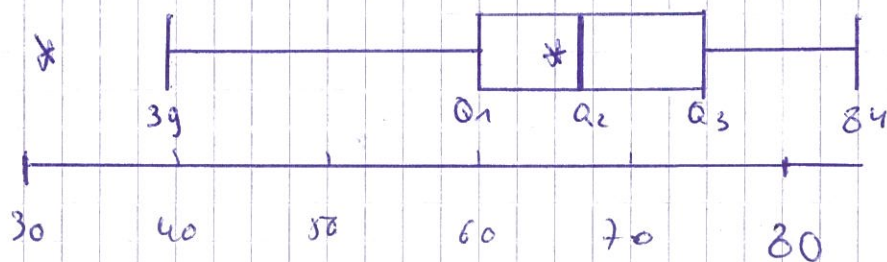
d) $Q_1 = 60$; $Q_3 = 74$

$$L = 60 - \frac{3}{2} \cdot 14$$

$$= 39_{\text{geb.}} > 31$$

$$R = 74 + \frac{3}{2} \cdot 14$$

$$= 95 > 84_{\text{geb.}}$$



e) Dat ziet gij van het # erover.

Oefening 3

a) frequentie:

0) 6

1) 8

2) ~~4~~ 5

3) 3

4) 3

5) 3

6) 0

7) 2

~~8)~~

~~9)~~

~~10)~~

$$\Sigma = 30$$

rel:

0) 6/30

1) 8/30

2) 5/30

3) 3/30

4) 3/30

5) 3/30

6) 0/30

7) 2/30

b) Maatstaf diagram.

Oefening 4

$$x_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\Delta}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\Delta = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{x_i - \bar{x}}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{n\Delta} \left(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m \bar{x} \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left(\bar{x} - \frac{m}{n} \bar{x} \right)$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - 0)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - m\bar{x}}{s_x^2} \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{s_x^2} \quad ?
 \end{aligned}$$

Oefening 6.4

$$TB: x_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

heeft gem = 0 en var = 1

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

$$= \frac{1}{s n} \left(-n \bar{x} + \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$= \frac{1}{s} \left(-\bar{x} + \bar{x} \right)$$

$$= 0$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{s^2}$$

$$= \frac{s^2}{s^2} = 1.$$

Oefening 5

a) dit blijft: $\bar{y}_i = \bar{x}_i + c$
 $\tilde{y}_i = \tilde{x}_i + c.$

b) $\bar{y}_i = c \bar{x}_i$
 $\tilde{y}_i = c \tilde{x}_i.$

Oefening 6

a) Q_1 : meest v.d. 5 laagste gegevens:
~~36~~ ~~36~~ (37) ~~36~~ ~~36~~

Q_3 : meest v.d. 5 hoogste gegevens:
~~40~~ ~~40~~ (41) ~~43~~ ~~43~~

$$\begin{aligned} L &= Q_1 - \frac{3}{2} IQR \\ &= 37 - \frac{3}{2} (41 - 37) \\ &= 31 < 36 \text{ dus } 36 \text{ mag tellen als } L \text{ score.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= Q_3 + \frac{3}{2} IQR \\ &= 41 + \frac{3}{2} (41 - 37) \\ &= 47 > 43 \text{ dus mag } 43 \text{ behouden als } R \text{ score.} \end{aligned}$$

b) trimaditeitje

c) plz...

Übung 7

a)

0	5
1	5 6
2	0 1 5 7
3	0 0 1 2 4 5 8
4	1 3 4 4
5	2
6	6

$$b) Q_1 = \frac{21 + 25}{2} = 23$$

$$Q_3 = \frac{41 + 43}{2} = 42$$

$$IQR = 19$$

$$c) \text{gem} = \bar{x} = 32,45$$

$$\text{med} = \tilde{x} = 31,5$$

$$\bar{x} > \tilde{x} \Rightarrow \text{rechtsschief}$$



Bijkomende oefeningen – Hoofdstuk 4

- 4.C.1 De gezamenlijke levenstijden van het wekkergedeelte (X) en het radiogedeelte (Y) van een wekkerradio worden gegeven door de volgende gezamenlijke dichtheid, met $\lambda > 0$,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{als } 0 \leq x \leq y \text{ en } x \leq y \leq \infty \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Hint: Let op de grenzen: x neemt waarden aan tussen 0 en y , terwijl y waarden aanneemt tussen x en oneindig.

1. Bepaal de marginale dichtheden van X en Y en specificeer de naam van de verdeling.
2. Bepaal de conditionele dichtheden van X en Y en specificeer de naam van de verdeling.
3. Toon aan of X en Y al dan niet onafhankelijk zijn (ja of nee volstaat niet als antwoord, er moet een berekening gegeven worden die je antwoord eenduidig ondersteunt).

4.C.2 $\log(X_i) \sim N(2, 25)$ voor $i = 1, \dots, 10$. Noteer hun product $W = \prod_{i=1}^{10} X_i$. Bereken het eerste kwartiel (benedenkwartiel) van W , dus $Q_1 = Q_W(0.25)$.

- 4.C.2 Een kampplaats van een jeugdbeweging dicht bij een rivier moet ontruimd worden met een roeiboot met een maximum capaciteit van 250 kg. Een hulpverlener van 70 kg roeit de boot. De kinderen op kamp wegen gemiddeld 25 kg met een variantie van 4 kg. Neem aan dat dit gewicht een normale verdeling volgt en dat de gewichten onafhankelijk zijn van elkaar. Bereken de kans dat de maximum capaciteit van de boot *niet* overschreden wordt met 7 kinderen en de hulpverlener aan boord.

- 4.C.3 Vijf vrienden gaan een dag naar zee en nemen daar een avondmaal. Noem toevalsveranderlijke X_1 het bedrag dat per persoon besteed wordt aan drinken, dit is gemiddeld 2.5€ met variantie 3; X_2 is het bedrag per persoon voor de maaltijd, dat is gemiddeld 12€ met een variantie gelijk aan 6. Verder eten ze ieder een ijsje waarvan de prijs per bol gelijk is aan 1.3€. Het aantal bollen, N_3 , is ofwel 1 met kans 0.15; 2 met kans 0.6; of 3 met kans 0.25. Noem X_3 het bedrag per persoon voor het ijsje. Verder is geweten dat de correlatie tussen X_1 en X_2 gelijk is aan 0.4; de correlatie tussen X_1 en X_3 is gelijk aan 0.1 en de correlatie tussen X_2 en X_3 is gelijk aan -0.3 .

Bij de berekeningen mag je aannemen dat iedere persoon onafhankelijk van de anderen beslist wat te nemen voor maaltijd, drinken en ijsje.

Bereken (a) het gemiddelde en (b) de variantie van het totale bedrag voor deze vijf vrienden samen voor een maaltijd plus drinken plus een ijsje.

- 4.C.4 Een bus met 30 toeristen brengt een bezoek aan Leuven. Op het einde van het bezoek is er de mogelijkheid om een ijsje te kopen. Niet iedereen zal dat doen. Iedere persoon beslist met een kans van 25% om een ijsje te kopen. De wachttijd om het ijsje te kiezen en te betalen voor iedere persoon apart is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 2 minuten (er is slechts één ijsjesverkoper). De reisorganisatie wil dit ijsjesfestijn incalculeren in haar reisschema en voorziet hiervoor: 10 minuten voor het eigenlijke opklikken + de verwachte waarde van de tijd die nodig is tot de laatste persoon die dat wil een ijsje gekocht heeft + $2 \times$ de standaarddeviatie van deze tijd. Hoeveel bedraagt de totale tijd die de reisorganisatie hiervoor zal incalculeren?

Antwoorden:

- 4.C.1 (a) $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, exponentiële verdeling; $f_Y(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$, gamma verdeling.
(b) $f_{Y|X}(y|x) = \lambda e^{-\lambda(y-x)}$ als $y \geq x$, exponentiële verdeling op $[x, \infty)$; $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y}$ als $0 \leq x \leq y$, uniforme verdeling op $[0, y]$.
(c) X en Y zijn *niet* onafhankelijk.

4.C.2 0.8289

4.C.3 (a) 86.15, (b) 60.706

4.C.4 39.49 min

Bijkomende oefeningen – Hoofdstuk 5

4 5.C.1 Door de crisis enerzijds, en vegetarische initiatieven anderzijds, is de verkoop van vlees erg afgenomen in de laatste jaren. Een grootschalige frikandelfabrikant lijdt hier ook onder en heeft daarom beslist om enkele productie-eenheden met een te lage productiviteit te sluiten. In deze markt zijn productiviteitsverliezen te wijten aan het breken van de frikandel tijdens het verpakken ervan, door verminderde concentratie van werknemers. Eerder onderzoek van het management wees uit dat een fabriek met meer dan 120 gebroken frikandellen per dag dient gesloten te worden.

In een bepaalde productie-eenheid bedraagt de kans op breken van de frikandel $7 \cdot 10^{-4}$. Neem aan de totale productieoutput in deze eenheid exact 150.000 frikandellen per dag bedraagt en dat het breken van frikandellen de enige vorm van productiviteitsverlies is. Benader via de centrale limietstelling de kans dat deze fabriek gesloten zal moeten worden.

2 5.C.2 De prijs van een huis en van de grond waarop het huis staat is gecorreleerd met een correlatie gelijk aan 0,2. De prijs van een nieuw huis is gemiddeld 210 000 euro (werk met 210 k€) met standaardafwijking 30 000 euro (30 k€). De prijs van de bijhorende grond is gemiddeld 120 000 euro (120 k€) met standaardafwijking 15 000 euro (15 k€). Een immokantoor prijst ieder van haar projecten onafhankelijk van de prijs van de andere projecten. Benader de kans dat het gemiddelde van de volgende 30 aankopen van een huis met grond tussen de 300 k€ en 345 k€ ligt.

Antwoorden:

5.C.1 0.0721

5.C.2 0.9884

Bijkomende oefeningen – Hoofdstuk 6

6.C.1 Voor de bedrijven van de Bel20 maakt men een onderscheid tussen de bedrijven waar voornamelijk diensten geleverd worden (telecom etc.) en de bedrijven die tastbare producten leveren (vb.: farmaceutisch bedrijven). Ook de Bel20-bedrijven konden niet ontsnappen aan de stakingen in het najaar van 2014. Voor elk bedrijf werd het aantal stakers per 1000 werknemers weergegeven in onderstaande tabel.

Diensten		Producten	
Ackermans & van Haaren	30	AB Inbev	30
Ageas	45	Befimmo	60
Belgacom	70	Bekaert	85
BPost	45	Cofinimmo	45
Delta Lloyd	65	Colruyt	10
Elia	42	Delhaize	100
GBL	25	D'Ieteren	85
GDF Suez	80	Solvay	75
KBC	38	UCB	70
Telenet Group	20	Umicore	55

(a) Bereken per bedrijfstype: het gemiddelde, het eerste, tweede en derde kwartiel van het aantal stakers per 1000 werknemers.

Wat zeg je tegen
een Spanjaard met een
Mooi Powerpoint?
Buenos dias

- (b) Teken de overeenkomstige boxplots van het aantal stakers per 1000 werknemers voor de diensten-bedrijven en voor de bedrijven die producten leveren.
- (c) Bespreek beknopt welke informatie deze boxplots je geven over de verschillen in het aantal stakers tussen de bedrijfstypes.

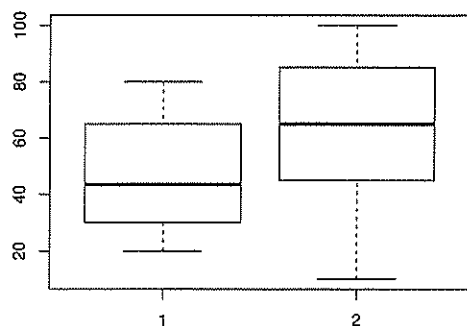
6.C.2 In navolging van het wereldkampioenschap voetbal in Brazilië, willen de werknemers van de Belgische voetbalbond een herevaluatie doen van de marktwaarde van onze Rode Duivels. Onderstaande tabel geeft de marktwaarde van de WK-selectie per speler in miljoen dollar weer.

Rode Duivel	Marktwaarde	Rode Duivel	Marktwaarde
Toby Alderweireld	15	Nicolas Lombaerts	14
Sammy Bossut	2	Romelu Lukaku	41
Nacer Chadli	12	Dries Mertens	26
Laurent Ciman	5	Simon Mignolet	19
Thibaut Courtois	37	Kevin Mirallas	18
Kevin Debruyne	29	Divock Origi	16
Steven Defour	11	Daniel Van Buyten	3
Moussa Dembele	30	Anthony Vanden Borre	4
Marouane Fellaini	37	Thomas Vermaelen	21
Eden Hazard	66	Jan Vertonghen	33
Adnan Januzaj	10	Axel Witsel	51
Vincent Kompany	52		

- (a) Construeer een stengel- en bladdiagram voor al deze gegevens.
- (b) Bespreek de scheefheid door deze expliciet te berekenen via de formule. Koppel dit terug aan wat je ziet in het diagram van vraag (a).

Antwoorden:

6.C.1 Producten: 46, 30, 43.5, 65; diensten: 61.5, 45, 65, 85



6.C.2 Scheefheid= 0.693, rechtsscheef.

Bijkomende oefeningen Hoofdstuk 4

Oefening 1

$$1) f_x(x) = \int_x^{\infty} f_{x,y}(x,y) dy$$

$$= \lambda^2 \int_x^{\infty} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right]_x^{\infty}$$

$$= \lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda x}$$

dit is een exp verdeling.

$$f_y(y) = \int_0^y f_{x,y}(x,y) dx$$

$$= \lambda^2 \int_0^y e^{-\lambda y} dx$$

$$= \lambda^2 \left[x \right]_0^y e^{-\lambda y}$$

$$= \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & \text{voor } x \leq y \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

dit is een gamma verl.

$$2) f_{x,y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda^2 y e^{-\lambda y}} = \frac{1}{y}$$

dit is een uniforme verdeling.

$$= \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{voor } 0 \leq x < y \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
 &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} \\
 &= \lambda e^{-\lambda y + \lambda x} \\
 &= \lambda e^{\lambda(x-y)}
 \end{aligned}$$

dit is een exp verdeling
als $y \geq x$.

$$\begin{aligned}
 3) \quad f_{X,Y}(x,y) &\neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow \text{onafh} \\
 \lambda^2 e^{-\lambda y} &= \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda^2 y e^{-\lambda y}
 \end{aligned}$$

↳
gevolg: $\text{nl onafhankelijk} \Rightarrow \text{afhankelijk}$

Oefening 1 Bis

$$\log(x_i) \sim \text{Normaal}(2; 25)$$

$$W = \prod_{i=1}^{10} x_i; \quad \log(W) = \sum_{i=1}^{10} \log x_i \quad \text{is dus ook normaal verdeeld}$$

$$E[W] = 10 \cdot 2 = 20$$

$$\text{Var}(W) = 10 \cdot 25 = 250$$

$$P(W \leq w) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(\log(W) \leq \log(w)) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(Z \leq \frac{\log w - 20}{\sqrt{250}}) = 0,25$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq \frac{20 - \log w}{\sqrt{250}}) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(Z \leq \frac{20 - \log w}{\sqrt{250}}) = 0,75$$

→ Zoek in tabel voor welke $P(X \leq q) = 0,75$.

$$\text{dit is voor } \frac{0,67 + 0,68}{2} = 0,675$$

→ stel dan nu:

$$\frac{20 - \log(w)}{\sqrt{250}} = 0,675$$

$$\Rightarrow 20 - \log w = \sqrt{250} \cdot 0,675$$

$$\Rightarrow 20 - \sqrt{250} \cdot 0,675 = \log w$$

$$\Rightarrow w = 11240,885$$

* opm: belangrijk is hier dat de CLS nt toegepast hoeft te worden. de som van normale verdelingen blijft een normale verdeling, en deze hebben allen dezelfde μ en σ dan kan men gewoon zo... doen.

Oefening 2

• $G_i \sim \text{normaal} (\mu = 25, \sigma^2 = 4)$
 $i = 1, \dots, 7$

• Definieren $W = \sum_{i=1}^7 G_i$

• We zoeken dan

$$P(W + 70 < 250) = P(W \leq 180)$$

• Dit zullen we benaderen m.b.v. de CLS.

Bereken daartoe $E[W]$ en $\text{Var}[W]$:

$$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^7 G_i\right]$$

$$= 7 \cdot E[G] = 7 \cdot 25 = 175$$

$$\text{Var}(W) = \sum_{i=1}^7 \text{Var}(G_i)$$

$$= 7 \cdot \text{Var}(G) = 7 \cdot 4 = 28$$

$$\cdot P\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{\text{Var}(W)}} \leq \frac{180 - 175}{\sqrt{28}}\right)$$

$$= P(Z \leq 0,95) = 0,8289$$

Oefening 3

$X_{1i} \sim \text{Normal}(2,5; \sigma^2 = 3)$ # drank

$X_{2i} \sim \text{Normal}(12; \sigma^2 = 6)$ # eten

prijs bol = ¹²⁰¹⁵⁰ 1,3

$N_{3i} \sim$

$$X_{3i} = 1,3 N_3$$

$$\rho_{X_1, X_2} = 0,4 \quad ; \quad \rho_{X_1, X_3} = 0,1 \quad ; \quad \rho_{X_2, X_3} = -0,3$$

• Definieren $W = \sum_{i=1}^5 (X_{1i} + X_{2i} + X_{3i})$ het totaal bedrag.

$$a) E[W] = E\left[\sum_{i=1}^5 X_{1i}\right] + E\left[\sum_{i=1}^5 X_{2i}\right] + E\left[\sum_{i=1}^5 X_{3i}\right]$$

$$= 5 \cdot E[X_1] + 5E[X_2] + 5E[X_3]$$

$$= 5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 12 + 5 \cdot E\left[1,3 \sum_{i=1}^5 N_{3i}\right]$$

$$= 72,5 + 6,5 E[N]$$

$$= 72,5 + 6,5 (1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,25)$$

$$= 140,75$$

b) bereken de variantie eerst voor 1 persoon.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^3 X_i\right) = \text{Var}(X_1 + X_2 + 1,3 N_3)$$

$$= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 1,3^2 \text{Var}(N_3)$$

$$+ \text{COV}(X_1, X_2) + 1,3 \cdot \text{COV}(X_1, X_3) + 1,3 \text{COV}(X_2, X_3)$$

Nog te berekenen adhv
correlaties!

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\text{COV}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}} \quad (\Rightarrow \text{COV}(X_1, X_2) = \rho_{X_1, X_2} \cdot \sigma_{X_1} \sigma_{X_2})$$

$$\text{COV}(X_1, X_2) = 0,4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$

$$\text{COV}(X_1, X_3) = 0,1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma_{X_3}$$

$$\text{COV}(X_2, X_3) = -0,3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sigma_{X_3}$$

nog te bereken
 $\text{Var}(X_3) = E[X_3^2] - E[X_3]^2$

$$\text{Var}(X_3) = E[X_3^2] - E[X_3]^2$$

$$\cdot E[X_3^2] = E[(1,3N)^2]$$

$$= 1,3^2 E[N^2]$$

$$= 1,3^2 (1^2 \cdot 0,15 + 2^2 \cdot 0,6 + 3^2 \cdot 0,25)$$

$$= 8,112$$

$$\cdot E[X_3]^2 = (1,3 \cdot E[N])^2$$

$$= 1,3^2 \cdot (1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,25)^2$$

$$= 7,4529$$

$$\text{dus } \text{Var}(X_3) = 8,112 - 7,4529$$

$$= 0,6591$$

$$\text{dus } \text{Cov}(X_1, X_3) = 0,1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{0,6591}$$

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = -0,3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{0,6591}$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + 1,3N_3) = 3 + 6 + 1,3^2 \cdot 0,6591$$

$$+ 0,4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + 0,1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{0,6591} - 0,3 \sqrt{6} \sqrt{0,6591}$$

$$= 11,35$$

$$5 \text{ Var}(\dots) = 56,77$$

met opt?

Oefening 4C3

$$X_1 \sim \text{normaal}(\mu = 2,5; \sigma^2 = 3)$$

$$X_2 \sim \text{normaal}(\mu = 12; \sigma^2 = 6)$$

$$N_3 \sim (p_1 = 0,15; p_2 = 0,6; p_3 = 0,25)$$

$$X_3 \text{ bedrag pp voor } g_3 = 1,3 \cdot N_3$$

$$\rho_{X_1, X_2} = 0,4; \rho_{X_1, X_3} = 0,1; \rho_{X_2, X_3} = -0,3$$

a) Noem T het totaalbedrag gedefinieerd als volgt:

$$T = \sum_{i=1}^5 (X_{1i} + X_{2i} + X_{3i})$$

Bereken dan $E[T]$.

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\sum_{i=1}^5 X_{1i}\right] + E\left[\sum_{i=1}^5 X_{2i}\right] + E\left[\sum_{i=1}^5 X_{3i}\right] \\ &= 5 \cdot E[X_1] + 5 \cdot E[X_2] + 5 \cdot 1,3 \cdot E[N] \\ &= 5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 12 + 5 \cdot 1,3 \cdot (1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,25) \\ &= 86,15. \end{aligned}$$

b) $\text{var}(T)$

$$\begin{aligned} &= \text{var}\left(\sum_{i=1}^5 (X_{1i} + X_{2i} + X_{3i})\right) \\ &= \text{var}\left(\sum_{i=1}^5 (X_{1i} + X_{2i} + X_{3i})\right) \\ &= 5 \text{var}(X_{1i} + X_{2i} + X_{3i}) \\ &= 5(\text{var } X_1 + \text{var } X_2 + \text{var}(X_3) \\ &\quad + 2 \text{cov}(X_1, X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_3) \\ &\quad + 2 \text{cov}(X_2, X_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{var}(X_3) &= 1,3^2 \cdot \text{var}(N_3) \\ &= 1,3^2 \cdot (E(N_3^2) - E(N_3)^2) \\ &= 1,3^2 \cdot (1^2 \cdot 0,15 + 2^2 \cdot 0,6 + 3^2 \cdot 0,25 - 2,1^2) \\ &= 0,6591. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) &= \rho_{X_1, X_2} \cdot \sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_2)} \\ &= 0,4 \cdot \sqrt{3 \cdot 6} \\ &= 1,6971. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Cov}(X_1, X_3) &= \rho_{X_1, X_3} \cdot \sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_3)} \\ &= 0,1 \cdot \sqrt{3 \cdot 0,6591} \\ &= 0,1406 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Cov}(X_2, X_3) &= \rho_{X_2, X_3} \cdot \sqrt{\text{Var}(X_2) \cdot \text{Var}(X_3)} \\ &= -0,3 \cdot \sqrt{6 \cdot 0,6591} \\ &= -0,5966 \end{aligned}$$

Dan is $\text{Var}(T)$

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot (6 + 3 + 0,6591) + 2 \cdot 1,6971 + 2 \cdot 0,1406 + 2 \cdot (-0,5966), \\ &= 60,7065. \end{aligned}$$

Übung 4

$$n = 30$$

$$K \sim \text{binomial} (p = 0,25; n = 30)$$

$$T \sim \text{exponential} (\lambda = \frac{1}{2}).$$

$$E\left(\sum_{i=1}^K T_i\right) = E(K) \cdot E(T)$$

$$= 30 \cdot 0,25 \cdot \frac{1}{(1/2)}$$

$$= 15$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^K T_i\right) = E(T)^2 \cdot \text{Var}(K) + E(K) \cdot \text{Var}(T)$$

$$= \left(\frac{1}{1/2}\right)^2 \cdot 30 \cdot 0,25 \cdot 0,75 + 30 \cdot 0,25 \cdot \frac{1}{(1/2)^2}$$

$$= 52,5$$

$$\sigma = \sqrt{52,5}$$

$$\text{dur} = 10 + E(\dots) + 2 \cdot \sigma$$

$$= 10 + 15 + 2 \cdot \sqrt{52,5}$$

$$= 39,49$$

Bijkomende Oefeningen Hoofdstuk 5

Oefening 1

$$B \sim \text{binomiaal} (p = 7 \cdot 10^{-4}; n = 150000)$$

→ veel te groot en termen geen cum. verdelingsf.

⇒ benaderen met de normale verdeling * #CLS

$$* \text{Controle: } np = 150000 \cdot 7 \cdot 10^{-4} = 105 \quad \text{ok}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(B) &= 150000 \cdot 0,0007 \cdot 0,9993 \\ &= 104,9265 \end{aligned}$$

$$P(B \geq 120)$$

$$= 1 - P(B \leq 120)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{120 - 105}{\sqrt{104,93}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,46)$$

$$= 1 - 0,9279$$

$$= 7,21\%$$

Oefening 2

$$H \sim \text{normaal} (\mu = 210; \sigma = 30) \quad P_{HG} = 0,2$$

$$G \sim \text{normaal} (\mu = 120; \sigma = 15) \quad n = 30$$

Definieren: $S_i = H_i + G_i$ met $i = 1, \dots, 30$

We zoeken dan $P\left(300 \leq \sum_{i=1}^{30} \frac{S_i}{30} \leq 345\right) = ?$

• Voor 1 H+G:

$$\begin{aligned} E[S_i] &= E[H] + E[G] \\ &= 210 + 120 = 330 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_i) &= \text{Var}(H + G) \\ &\stackrel{\text{form 11}}{=} \text{Var}(H) + \text{Var}(G) + 2\text{Cov}(H, G) \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(H, G) = \rho_{HG} \cdot \sigma_H \cdot \sigma_G = 0,2 \cdot 30 \cdot 15 = 90$$

$$= 30^2 + 15^2 + 2 \cdot 90 = 1305$$

• Voor 30 HG: $E[\sum S_i] = 30 \cdot 330 = 9900$
 $\text{Var}(\sum S_i) = 30 \cdot 1305 \stackrel{\text{form 11}}{=} 39150$

$$\textcircled{X} = P\left(Z \leq \frac{10350 - 9900}{\sqrt{39150}}\right) - P\left(Z \leq \frac{9000 - 9900}{\sqrt{39150}}\right)$$

$$= P(Z \leq 2,27) - P(Z \leq -4,55)$$

$$= 0,9884$$

Richardson van

Bijkomende Oefeningen Hoofdstuk 6

Oefening 1

$$a) \cdot \bar{X}_D = \frac{30 + 45 + 70 + 45 + 65 + 42 + 25 + 80 + 38 + 20}{10}$$

$$= 46$$

$$\cdot \bar{X}_P = \frac{30 + 60 + 85 + 45 + 10 + 100 + 85 + 75 + 70 + 55}{10}$$

$$= 61,5$$

$$\cdot Q_{1D} = 30$$

$$Q_{1P} = 45$$

$$\cdot Q_{2D} = \frac{45 + 42}{2}$$
$$= 43,5$$

$$Q_{2P} = \frac{60 + 76}{2}$$
$$= 65$$

$$\cdot Q_{3D} = 65$$

$$Q_{3P} = 85$$

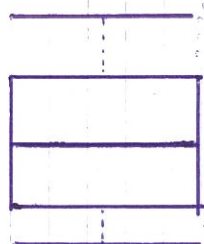
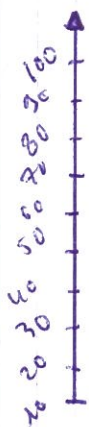
$$b) L_D = Q_1 - \frac{3}{2} IQR$$
$$= 30 - \frac{3}{2} (35)$$
$$= -\frac{45}{2} < 20 \text{ OK}$$

$$R_D = Q_3 + \frac{3}{2} IQR$$
$$= 65 + \frac{3}{2} 35$$
$$= 112,5 > 80 \text{ OK}$$

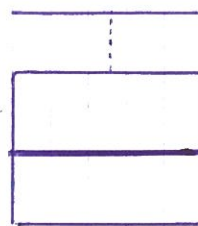
$$L_P = 45 - \frac{3}{2} IQR$$
$$= 45 - \frac{3}{2} 40$$
$$= -15 < 10 \text{ OK}$$

$$R_P = 85 - \frac{3}{2} IQR$$
$$= 85 + \frac{3}{2} 40$$
$$= 125 > 100 \text{ OK}$$

Gevolg: de gemiddelde waarden mogen voor de smekken geb w.



DIENSTEN



PRODUCTEN

Übung 2

a)

0	2 5 3 4
1	5 2 1 0 4 9 8 6
2	9 6 1
3	7 0 7 3
4	1
5	2 1
6	6

→

0	2 3 4 5
1	0 1 2 4 5 6 8 9
2	1 6 9
3	0 3 7 7
4	1
5	1 2
6	6

} rechtsschief

b) schiefheit =

$$\frac{\frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{22} \sum_{i=1}^{23} (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

=

to large for this shift

Beschrijvende statistiek en Kansrekenen

Bijkomende oefenvragen – Prof. G. Claeskens

VAR...

1. Het gewicht van een man is normaal verdeeld met gemiddelde 77 kg en standaardafwijking 9.5. Het gewicht van een vrouw is normaal verdeeld met gemiddelde 64 kg en standaardafwijking 8.8. Een lift heeft een draagvermogen 800 kg. In de lift staan 6 mannen en 5 vrouwen. Bereken de kans dat de lift blokkeert wegens overbelasting. Je mag hierbij aannemen dat het gewicht van kleding en eventuele bagage verwaarloosbaar is en dat de gewichten van de afzonderlijke personen onafhankelijk zijn.
2. De klantendienst van een grote firma werkt met een callcenter van 3 vaste personeelsleden. Als één van de vaste personeelsleden afwezig is (wegens ziekte of vakantie) wordt hij/zij vervangen door een interimkracht. Een werknemer is 3 dagen op 40 afwezig, onafhankelijk van mekaar. Een vaste medewerker neemt gemiddeld 20 keer per uur de telefoon op om een nieuwe oproep te verwerken. Voor een interimkracht is dit slechts de helft. Ik bel naar de klantendienst en krijg direct te horen dat ik de volgende aan de beurt zal zijn. Dan duurt het nog minstens 2 minuten alvorens ik een medewerker aan de lijn krijg. Bereken de kans dat die dag alle vaste werknemers aanwezig zijn. Je mag aannemen dat de wachttijd tot een medewerker aan de lijn komt exponentieel verdeeld is.
3. Toevalsveranderlijke X geeft de kost op het nalezen van een tekst op typfouten, X volgt een log-normale verdeling waarvan het gemiddelde en de variantie afhankelijk zijn van het aantal pagina's Y van de tekst. Namelijk, voor $Y = y$ pagina's, geldt dat $E(X|Y = y) = 20 + 0.5y$ en $\text{Var}(X|Y = y) = (20 + 0.5y)^2$. Het aantal pagina's Y volgt een Poissonverdeling met gemiddelde 50. Bereken de standaardafwijking van X .
4. Gegeven is een portfolio X bestaande uit a keer aandeel S_1 en $(1 - a)$ keer aandeel S_2 . Gegeven is dat (S_1, S_2) bivaariaat normaal verdeeld is met gemiddelde $(0.8, 0.9)$ en met covariantiematrix $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.15 \\ 0.15 & 0.4 \end{pmatrix}$.
 - (a) Bereken de waarde van de constante a waarvoor de variantie van de portfolio X minimaal is.
 - (b) Voor $a = 0.4$, bereken $P(|X| < 1)$.
5. We kopen 8 eitjes bij boer David en steken deze in twee identieke eierdozen die ieder vier eitjes kunnen bevatten. We kopen ook 4 eitjes bij boer Mark en steken deze in een derde identieke eierdoos. We weten niët of de eitjes op dezelfde dag gelegd zijn. Voor ieder ei afzonderlijk wordt de tijd vanaf het leggen van het ei (de ouderdom) beschreven door een Weibull verdeling met de tijd t uitgedrukt in dagen. De eitjes van boer David zijn meestal iets verser, de parameters van de verdeling zijn $\beta_1 = 4$ en $\delta_1 = 10$. Voor de eitjes van boer Mark geldt dat $\beta_2 = 2$ en $\delta_2 = 10$. We nemen aan dat de ouderdommen van alle eitjes onafhankelijk zijn. Om een biscuittaart te bakken zijn er 4 eitjes nodig. We nemen willekeurig één van de drie eierdoosjes en gebruiken de 4 eieren van dat doosje. De taart is enkel luchtig genoeg indien alle 4 de eitjes hoogstens 14 dagen oud zijn. Na het bakken is de taart prima gelukt. Wat is de kans dat de gebruikte eitjes bij boer Mark gekocht werden?
6. Toevalsveranderlijke X kan slechts twee mogelijke uitkomsten aannemen (succes of niet), maar het succes wordt zelf bepaald door een toevalsveranderlijke P , welke een betaverdeling volgt met parameters $(4, 2)$. Bereken de variantie van X .

Bijkomende oefeningen 2011-2012

Oefening 1

$$G_M \sim \text{normaal}(\mu = 77, \sigma = 9,5)$$

$$G_V \sim \text{normaal}(\mu = 64, \sigma = 8,8)$$

$$T = \text{totaal gewicht} = \sum_{i=1}^6 G_{M_i} + \sum_{i=1}^5 G_{V_i}$$

$$P(T \geq 800) = 1 - P(T \leq 800)$$

$$E[T] = 6 \cdot E[G_M] + 5 \cdot E[G_V]$$

$$= 6 \cdot 77 + 5 \cdot 64$$

$$= 782$$

$$\text{Var}(T) = 6 \cdot \text{Var}(G_M) + 5 \cdot \text{Var}(G_V)$$

$$= 6 \cdot 9,5^2 + 5 \cdot 8,8^2$$

$$= 928,7$$

$$1 - P(T \leq 800) = 1 - P\left(Z \leq \frac{800 - 782}{\sqrt{928,7}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,59)$$

$$= 1 - 0,7224$$

$$= 0,2776$$

Oefening 4

$$X = a S_1 + (1-a) S_2$$

$$\begin{aligned} a) \text{var}(X) &= a^2 \text{var}(S_1) + (1-a)^2 \text{var}(S_2) \\ &\quad + 2 \cdot (a)(1-a) \cdot 0,15 \\ &= 0,5a^2 + 0,4 - 2 \cdot 0,4a + 0,4a^2 + 0,3a - 0,3a^2 \\ &= 0,6a^2 - 0,5a + 0,4 \end{aligned}$$

afleiden geeft $1,2a - 0,5 = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{0,5}{1,2} = 41,67\%$$

$$b) P(X < 1) = P(0,4 S_1 + 0,6 S_2 < 1)$$

$$\begin{aligned} E[0,4 S_1 + 0,6 S_2] &= 0,4 E[S_1] + 0,6 E[S_2] \\ &= 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,9 \\ &= 0,86 \end{aligned}$$

$$a = 0,4$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= 0,6 \cdot 0,4^2 - 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \\ &= 0,296 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 1) &= P(X \leq 1) - P(X \leq -1) \\ &= P(X \leq 1) - (1 - P(X \leq 1)) \\ &= 2 P(X \leq 1) - 1 \\ &= 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{1 - 0,86}{\sqrt{0,296}}\right) - 1 \\ &= 0,2052 \end{aligned}$$

In de oplossing is g rekenen gehoren met

~ zou kunnen vragen $P(X \geq -1)$
portefeuille pos moet zijn?
niet duidelijk.

Oefening 5

• Schema:

8 bij Darius $\begin{cases} 4 \text{ in door 1} \\ 4 \text{ in door 2} \end{cases}$

4 bij Mark $\text{---} 4 \text{ in door 3}$

• $D \sim \text{Weibull}(\beta = 4; \delta = 10)$

• $M \sim \text{Weibull}(\beta = 2; \delta = 10)$

• De twee de volgende gebeurtenissen

D = het gekozen deursje is een van Darius

M = " " " " Mark.

T = alle 4 eijes zijn hoogstens 14 d oust

• Te zoeken is volgende kans:

$$P(M|T) = \frac{P(T|M) \cdot P(M)}{P(T|M) \cdot P(M) + P(T|D) \cdot P(D)}$$

• $P(M) = 1/3$ (1 van 3 deursjes)

• $P(D) = 2/3$ (2 van 3 deursjes)

$$\begin{aligned} P(T|M) &= F_M(14) = \left(1 - e^{-\left(\frac{14}{10}\right)^2}\right)^4 \\ &= 0,544827 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(T|D) &= F_D(14) = 1 - e^{-\left(\frac{14}{10}\right)^4} \\ &= 0,91688. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(M|T) = \frac{0,544827 \cdot 1/3}{0,544827 \cdot 1/3 + 0,91688 \cdot 2/3} = 0,22905$$

Oefening 8

a) continu; ratioschaal, numeriek

b)

	0	5	6	7	8	11	14
freq	39	1	2	1	1	1	1
rel f	0,35	0,02	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02

c) bereik = 14.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$Q_2 = 0$$

$$Q_3 = 0$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$Q_1 = 0$$

Kansrekenen en Beschrijvende Statistiek
Bijkomende oefenvragen – Prof. G. Claeskens

- 7
✓ 1. Bewijs dat voor drie discrete toevalsveranderlijken U, V en W de volgende gelijkheid geldt voor de gegeven kansmassafuncties in willekeurige punten u, v, w :

$$p_{U,V|W}(u, v|w) = p_{U|W}(u|w) \cdot p_{V|U,W}(v|u, w),$$

waarbij $p_{V|U,W}(v|u, w) = P(V = v | (U = u) \cap (W = w))$.

- 8
✓ 2. In een gezelschap van 6 personen hebben er 4 reeds dikwijls met stokjes gegeten, 2 nog helemaal nooit. Er zijn drie tafels van telkens 2 personen, iedere persoon krijgt precies 60g rijst (=3000 korrels per persoon). Na afloop blijkt dat er bij de eerste tafel tussen de 250 en 350 korrels rijst her en der gemorst is. Een geoefend gebruiker van eetstokjes morst met deze soort van rijst slechts gemiddeld 100 korrels voor zulk een portie, terwijl dit voor een ongeoefend persoon 200 korrels gemiddeld is. Benader de kans dat er aan deze eerste tafel twee ongeoefende stokjeseters zaten. Je mag aannemen dat beide personen onafhankelijk van elkaar morsen.

- 9
✓ 3. Een leverancier van windenergie bezit 12 windmolens verspreid over Vlaams-Brabant. We nemen aan dat elke molen jaarlijks onafhankelijk van de andere windmolens een hoeveelheid energie levert volgens een normale verdeling met een gemiddelde van 2 mega-watt (MW) en standaarddeviatie 0.15.

- ✓ (a) De leverancier wil dat er een kans is van hoogstens 5% dat er minder stroom geleverd wordt dan 23 MW, anders moet hij stroom bijleveren van andere bronnen. Zijn 12 windmolens hiervoor voldoende? Toon uw antwoord aan met berekeningen.

- ✓ (b) Stel dat één van de molens uitvalt. Bereken het totaal rendement aan stroom q (in MW) dat met kans 5% *niet* gehaald wordt met de overblijvende 11 windmolens.

- 10
✓ 4. Een verdeling genoemd naar Laplace heeft als momentgenererende functie $m_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$ voor $|t| < 1$. Bereken de variantie van X .

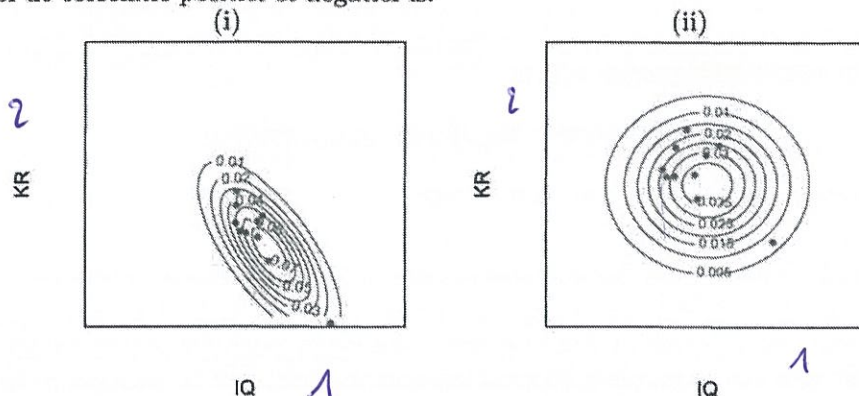
- ✓ 5. Om lid te worden van MENSA (een vereniging voor mensen met zeer hoog IQ), moet eerst een IQ test afgelegd worden. De testwaarden hiervoor liggen tussen 0 (geen enkele vraag correct) en 5 (alles juist). De onderstaande tabel bevat de testresultaten van de laatste 10 personen:

Persoon:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Testresultaat:	2.75	0.4	3.65	3.46	4.31	2.91	4.14	2.12	2.34	1.27

- (a) Bereken voor de testresultaten (i) de interkwartielafstand en (ii) het gemiddelde van de absolute afwijkingen van het gemiddelde.

0,4 1,27 2,12 2,34 2,75
2,91 3,46 3,65 4,14 4,31

(b) We hebben van tien personen ook testresultaten betreffende "kwantitatief redeneren" (KR), op identieke schaal gemeten als hun IQ-test. We veronderstellen dat de bivariate toevalsveranderlijke $(IQ, KR) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Geef voor beide figuren hieronder aan hoe gemiddelden en varianties van de twee componenten zich verhouden tot elkaar (meer bepaald welke component heeft de grootste waarde voor gemiddelde, voor variantie). Geef ook aan of beide componenten gecorreleerd zijn, en zo ja of de correlatie positief of negatief is.



6. Het gewicht van een man is normaal verdeeld met gemiddelde 77 kg en standaardafwijking 9.5. Het gewicht van een vrouw is normaal verdeeld met gemiddelde 64 kg en standaardafwijking 8.8. Een lift heeft een draagvermogen 800 kg. In de lift staan 6 mannen en 5 vrouwen. Bereken de kans dat de lift blokkeert wegens overbelasting. Je mag hierbij aannemen dat het gewicht van kleding en eventuele bagage verwaarloosbaar is en dat de gewichten van de afzonderlijke personen onafhankelijk zijn.

7. De klantendienst van een grote firma werkt met een callcenter van 3 vaste personeelsleden. Als één van de vaste personeelsleden afwezig is (wegens ziekte of vakantie) wordt hij/zij vervangen door een interimkracht. Een werknemer is 3 dagen op 40 afwezig, onafhankelijk van mekaar. Een vaste medewerker neemt gemiddeld 20 keer per uur de telefoon op om een nieuwe oproep te verwerken. Voor een interimkracht is dit slechts de helft. Ik bel naar de klantendienst en krijg direct te horen dat ik de volgende aan de beurt zal zijn. Dan duurt het nog minstens 2 minuten alvorens ik een medewerker aan de lijn krijg. Bereken de kans dat die dag alle vaste werknemers aanwezig zijn. Je mag aannemen dat de wachttijd tot een medewerker aan de lijn komt exponentieel verdeeld is.

8. Toevalsveranderlijke X geeft de kost op het nalezen van een tekst op typfouten, X volgt een log-normale verdeling waarvan het gemiddelde en de variantie afhankelijk zijn van het aantal pagina's Y van de tekst. Namelijk, voor $Y = y$ pagina's, geldt dat $E(X|Y = y) = 20 + 0.5y$ en $\text{Var}(X|Y = y) = (20 + 0.5y)^2$. Het aantal pagina's Y volgt een Poissonverdeling met gemiddelde 50. Bereken de standaardafwijking van X .

9. Gegeven is een portfolio X bestaande uit a keer aandeel S_1 en $(1 - a)$ keer aandeel S_2 . Gegeven is dat (S_1, S_2) biviaat normaal verdeeld is met gemiddelde $(0.8, 0.9)$ en met covariantiematrix $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.15 \\ 0.15 & 0.4 \end{pmatrix}$.

(a) Bereken de waarde van de constante a waarvoor de variantie van de portfolio X minimaal is.

(b) Voor $a = 0.4$, bereken $P(|X| < 1)$.

10. We kopen 8 eitjes bij boer David en steken deze in twee identieke eierdozen die ieder vier eitjes kunnen bevatten. We kopen ook 4 eitjes bij boer Mark en steken deze in een derde identieke eierdoos.

We weten *niet* of de eitjes op dezelfde dag gelegd zijn. Voor ieder ei afzonderlijk wordt de tijd vanaf het leggen van het ei (de ouderdom) beschreven door een Weibull verdeling met de tijd t uitgedrukt in dagen. De eitjes van boer David zijn meestal iets verser, de parameters van de verdeling zijn $\beta_1 = 4$ en $\delta_1 = 10$. Voor de eitjes van boer Mark geldt dat $\beta_2 = 2$ en $\delta_2 = 10$. We nemen aan dat de ouderdommen van alle eitjes onafhankelijk zijn.

Om een biscuittaart te bakken zijn er 4 eitjes nodig. We nemen willekeurig één van de drie eierdoosjes en gebruiken de 4 eieren van dat doosje. De taart is enkel luchtig genoeg indien *alle 4 de eitjes* hoogstens 14 dagen oud zijn. Na het bakken is de taart prima gelukt. Wat is de kans dat de gebruikte eitjes bij boer Mark gekocht werden?

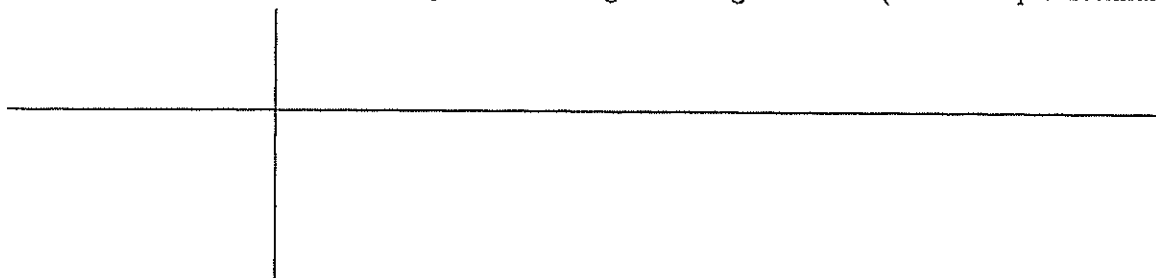
- ✓12. Een steekproef van 50 observaties resulteert in het volgende stengel-en bladdiagram waarbij de stam de tientallen voorstelt en de bladeren de eenheden.

0		399
1		01345689
2		023333455
3		00134699
4		01234467
5		023689
6		1
7		15
8		
9		7
10		0
11		06
12		1

- Bereken de interkwartielafstand.
- Geef de modus van deze waarden.
- Schets een boxplot overeenkomstig met deze gegevens. (Het steekproefgemiddelde is gelijk aan 40.86, dit hoef je niet na te rekenen.) Schrijf de waarden bij de belangrijke plaatsen in de tekening.

- ✓ 13. De website van railtime.be gaf op 4 januari 2011 voor treinen vertrekkend uit het station Brussel-Nationaal-Luchthaven tussen 5u15 en 13u00 de volgende informatie: 39 treinen hebben geen vertraging, 7 treinen hebben een weergegeven vertraging van respectievelijk 8, 14, 11, 6, 5, 7, 6 minuten.

- (a) Om welk soort van gegevens gaat het hier (indeling)?
- (b) Geef de frequentie- en relatieve frequentieverdeling in de volgende tabel (afronden op 3 decimalen).



- 3

Einduitkomsten bijkomende oefenvragen

1. Rechtstreeks via de definitie van voorwaardelijke kans.
2. 0.00065
3. (a) $0.0274 < 5\%$ dus 12 windmolens zijn voldoende.
(b) $q = 21.18162$.
4. 2
5. (a) $IQR = 1.53$, $MAD = 0.962$
(b)(i) $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2, \rho < 0$; (ii) $\mu_1 \approx \mu_2, \sigma_1 \approx \sigma_2, \rho = 0$.
6. 0.2776
7. 0.72498
8. $\sqrt{2050} = 45.2769$
9. (a) $a = 5/12 = 0.4166$, (b) 0.6023.
10. 0.22905
11. $2/9 = 0.222$
12. (a) $IQR = 30$; (b) 23;
(c) $1.5 IQR = 45$, $Q_1 - 45 = -23$, $\min = 3$ (linkereindpunt), $Q_3 + 45 = 97$ (rechtereindpunt). Uitschieters: 100, 110, 116, 121. box: van 22 tot 52, mediaan op 35, gemiddelde op 40.86. Tekening maken.
13. (a) numeriek, ratioschaal, continu
(b) 7 klassen maken; (c) Bereik = 14, $IQR = 0$.

Bijkomende oefeningen 2012-2013

Oefening 1

* Merk op dat $p_{U,V,W}(U,N|W) = \frac{p_{U,V,W}(U,N,W)}{p_W(W)}$

* het rechte hoek bestaat uit twee delen:

$$p_{U,W}(U|W) = \frac{p_{U,W}(U,W)}{p_W(W)}$$

$$p_{V|U,W}(N|U,W) = \frac{p_{V,U,W}(N,U,W)}{p_{U,W}(U,W)}$$

$$p_{U,V,W}(U,N,W) = \frac{p_{U,W}(U,W)}{p_W(W)} \cdot \frac{p_{V,U,W}(N,U,W)}{p_{U,W}(U,W)}$$

Deze laatste gelijkheid berijst het te bewijzen.

Oefening 2

S = stokpieten

G = geen stokpieten

T = van de 250 en 350 ryst korrels gemorst.

We berekenen $P(G,G|T)$

$$= \frac{P(T|GG) \cdot P(GG)}{P(T|GG) \cdot P(GG) + P(T|GS) \cdot P(GS) + P(T|SS) \cdot P(SS)}$$

Oefening 5

$$a) IQR = Q_3 - Q_1 = 3,65 - 2,12$$

$$Q_3 = 3,65$$

$$Q_1 = 2,12$$

$$= 1,53$$

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

$$n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{2,75 + 0,4 + \dots + 1,27}{10}$$

$$= 2,735$$

$$= \frac{1}{10} (|2,75 - 2,735| + |0,4 - 2,735| + \dots)$$

$$= 0,962$$

$$b) i) \mu_1 > \mu_2; \sigma_1 < \sigma_2; p < 0$$

$$ii) \mu_1 = \mu_2; \sigma_1 = \sigma_2; p = 0$$

De rest van oef zijn opgelost
op de voorgaande pagina's.

Succes, Maarten DW



Bedrijfsstatistiek – extra oefen-meerkeuzevragen

Prof. G. Claeskens

Punten: Juist antwoord: 1 punt. Fout antwoord: $-1/3$. Blanco: 0 punten.

1. In een fabriek worden maandelijks 2000 auto's geproduceerd. Deze kunnen echter niet allemaal verkocht worden, omdat er een kans is van 0.7% ($= 0.007$) dat een auto door defecten en dergelijke niet voldoet aan de voorschriften na een finale kwaliteitscontrole. Wat is de beste benadering van de kans dat 13 auto's of meer afgekeurd worden na de finale kwaliteitscontrole? Noteer Φ de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.
- 1.A. $\Phi(0.071)$
1.B. $\Phi(0.134)$
1.C. $\Phi(0.268)$
☒ 1.D. $\Phi(0.402)$
2. Elke avond in de week leest Jan een aantal hoofdstukken uit zijn favoriete boekenserie. De tijd dat Jan 's avonds met zijn neus in de boeken zit, is exponentieel verdeeld met gemiddelde 1.5 uur. De leestijden op verschillende avonden zijn onafhankelijk. Wat is de **standaarddeviatie** van de totale leestijd van maandag tot en met zondag?
- 2.A. 1.76
☒ 2.B. 3.97
2.C. 10.50
2.D. 15.75
3. Bij het testrijden van terreinwagens op onverharde wegen wordt er bij 7% van de terreinwagens schade aan de banden waargenomen. Een tester maakt met de ene na de andere terreinwagen een proefrit totdat exact 3 wagens schade vertonen aan de banden. Bereken de kans dat dit gebeurde bij de 20ste terreinwagen. Je mag veronderstellen dat het testen onafhankelijk gebeurt voor verschillende terreinwagens.
- 3.A. 0.0001
☒ 3.B. 0.0171
3.C. 0.0700
3.D. 0.1139
4. Welke bewering is **fout** voor een symmetrisch verdeelde toevalsveranderlijke X met dichtheidsfunctie f_X , cumulatieve verdelingsfunctie F_X en gemiddelde μ_X ?
- ☒ 4.A. $F_X(\mu_X) = 1$
4.B. $E[(X - \mu_X)^3] = 0$
4.C. $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \text{mediaan van } X$
4.D. $f_X(\mu_X - t) = f_X(\mu_X + t)$ voor alle t

5. We beschouwen vier teams die een wedstrijd spelen in verschillende groepen. Noteer met W_j de gebeurtenis dat team j wint ($j = 1, \dots, 4$). Welke van onderstaande zinnen verwoordt op een correcte manier de notatie $P((W_1 \cap W_2) \cup W_3 | W_4)$?

- 5.A. De kans dat teams 1 en 2 winnen of teams 3 en 4 verliezen.
 5.B. De kans dat teams 1 of 2 winnen en team 3 verliest als gegeven is dat team 4 verliest.
☒ 5.C. De kans dat teams 1 en 2 winnen of team 3 verliest als gegeven is dat team 4 verliest.
 5.D. De kans dat teams 1 en 2 winnen of team 3 verliest maar team 4 wint niet.

6. De vector (X, Y) heeft als gemiddelde de vector $(3, -3)$ en als covariantiematrix $\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 4 \end{pmatrix}$.
 Waaraan is $E[(3X + 8)(Y + 3)]$ gelijk?

- 6.A. -2
☒ 6.B. -1
 6.C. 0
 6.D. 26

7. Een studie werd uitgevoerd onder gezinnen wiens enige huisdieren (indien aanwezig) honden of katten zijn. Laat X het aantal honden en Y het aantal katten zijn van een willekeurig geselecteerd gezin. De gezamenlijke kansmassafunctie van X and Y is gegeven in de volgende tabel:

		x			
		0	1	2	3
y	0	0.05	0.15	0.10	0.05
	1	0.06	0.10	0.15	0.04
	2	0.08	0.07	0.04	0.01
	3	0.01	0.08	0.01	0

Waaraan is de kans gelijk dat het gezin 1 kat bezit, indien gegeven is dat ze 2 honden heeft?

- 7.A. 0.1500
 7.B. 0.3500
 7.C. 0.4286
☒ 7.D. 0.5000

8. De resultaten van de bachelorproef (op 20) waaraan 14 studenten deelnamen, worden weergegeven in onderstaand stengel- en bladdiagram, de stengel geeft de tientallen en eenheden weer, het blad het eerste cijfer na de komma.

11		6	8
12		1	4 8
13		3	7
14		2	3 9
15		3	9
16		2	
17		7	

Welke van de onderstaande uitspraken is fout?

8.A. Er is unimodaliteit.

8.B. Het bereik is gelijk aan 6.1 ✓

8.C. De mediaan is gelijk aan 13.95.

8.D. De eerste ordestatistiek is gelijk aan 11.6. ✓

9. De toevalsveranderlijke X meet het aantal berichten per dag dat een universiteit stuurt naar hun technische dienst. Gegeven is de volgende kansmassafunctie van X .

x	15	16	17	18	19	20
$P(X = x)$	0.07	0.20	0.20	0.30	0.15	0.08

Welke uitspraak is correct voor de gebeurtenissen $\{X < 19\}$ and $\{X \geq 17\}$?

9.A. Het zijn afhankelijke gebeurtenissen.

9.B. Het zijn complementaire gebeurtenissen.

9.C. Het zijn disjuncte gebeurtenissen.

9.D. Het zijn zekere gebeurtenissen.

10. In een computerklas zijn er drie printers K , L en M , de ene print al sneller dan de andere. Bestanden worden geprint op de eerst beschikbare printer. De kans dat een bestand gestuurd wordt naar de printers K , L en M is, respectievelijk, 0.2, 0.3 en 0.5. Het gebeurt dat een printerstoring optreedt doordat het papier er verkeerd ingaat. Wanneer een bestand gestuurd werd naar printer K gebeurt zo'n storing met kans 0.03, voor printer L is dat 0.04 en wanneer een bestand gestuurd werd naar printer M is de kans op een storing gelijk aan 0.01. Gegeven dat er een printerstoring was, wat is de kans dat dit bij printer M is?

10.A. 0.0200

10.B. 0.0625

10.C. 0.2174

10.D. 0.2608

11. Noteer F_X de cumulatieve verdelingsfunctie van X . Welke bewering is fout?

11.A. $F_X(x) \leq F_X(x+1)$ voor alle x ✓

11.B. $F_X(X)$ volgt een uniforme verdeling op $(0, 1)$.

11.C. $E[F_X(X)] = 1/2$ ✓

11.D. $\lim_{x \rightarrow 0} F_X(x) = -\infty$

12. $X \sim \log N(1, 2)$ is een lognormale toevalsveranderlijke. Welke van de volgende beweringen is niet geldig?

12.A. $P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{\log(x)-1}{\sqrt{2}})$ met $Z \sim N(0, 1)$

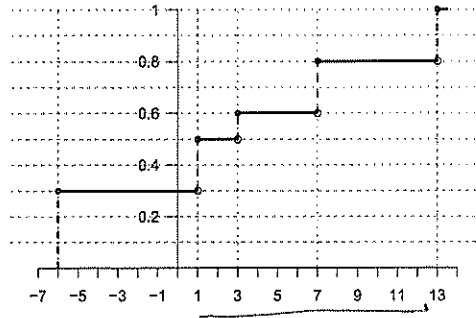
12.B. De verdeling is symmetrisch ✓

12.C. $\log(X) \sim N(1, 2)$ ✓

12.D. $\text{Var}(\log(X)) = 2$ ✓

13. Uitgaande van bijgevoegde cumulatieve verdelingsfunctie van X , wat is de kans dat X strikt groter is dan 1 gegeven dat X kleiner of gelijk is aan 12?

- 13.A. 0.3
 13.B. 0.375
 13.C. 0.625
 13.D. 0.875



14. Voor welk van onderstaande experimenten kan men de Poissonverdeling niet gebruiken?

- 14.A. Het aantal everzwijnen in het Heverleebos op 31 augustus.
 14.B. De hoeveelheid ruis op een medische CT scan.
 14.C. Het maandelijks aantal verkochte zwembeurten in het stedelijk zwembad.
 14.D. Het aantal annulaties per dag van afspraken bij een tandarts.
15. Neem $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ een bivariaat normaalverdeelde toevalsvector. Welke uitspraak is fout?
- 15.A. De verdeling van U/V is normaal.
 15.B. De marginale verdeling van V is normaal. ✓
 15.C. De verdeling van het gemiddelde $(U + V)/2$ is normaal. ✓
 15.D. De conditionele verdeling van V gegeven $U = 0$ is normaal.

Extra merkten wegen TEW

Oefening 1

$$n = 2000 \quad p_d = 0,007$$

$$D \sim \text{binomiaal}(n=2000; p=0,007)$$

$$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0,007 = 14$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 2000 \cdot 0,007 \cdot 0,993 = 13,902$$

$$P(D \geq 13) \stackrel{\text{CTU CORR}}{=} P(D \geq 12,5)$$

$$X \sim \text{normaal}(\mu=14; \sigma^2=13,902)$$

$$= 1 - P(D \leq 12,5)$$

$$= 1 - P\left(X \leq \frac{12,5 - 14}{\sqrt{13,902}}\right)$$

$$= 1 - P(X \leq -0,4023)$$

$$= 1 - (1 - P(X \leq 0,4023))$$

$$= P(X \leq 0,4023) \rightarrow \text{antw D}$$

Oefening 2

$$T \sim \exp\left(\lambda = \frac{1}{1,5}\right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{totale leestijd: } S = \sum_{i=1}^7 T_i$$

$$\text{var}(S) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^7 T_i\right)$$

$$= 7 \cdot \text{var}(T)$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{63}{4}$$

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{63}{4}} = 3,97$$

$$\rightarrow \text{antw B}$$

Aufg. 3

$$p = 0,07 \quad r = 3 \quad k = 20$$

$X \sim \text{negative binomial}(p = 0,07; r = 3)$

$$\begin{aligned} P(X = 20) &= \binom{20-1}{3-1} \cdot 0,07^3 \cdot 0,93^{17} \\ &= \frac{19!}{2! 17!} \cdot 0,07^3 \cdot 0,93^{17} \\ &= \frac{19 \cdot 18}{2} \cdot 0,07^3 \cdot 0,93^{17} \\ &= 0,0171 \rightarrow \text{Antwort B.} \end{aligned}$$

Aufg. 4

Antwort A.

Aufg. 5

Antwort C.

Aufg. 6

$$\mu_X = 3, \mu_Y = -3$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= 1 \\ \text{Var}(Y) &= 4 \\ \text{Corr}(X, Y) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(3X+8)(Y+3)] \\ &= E[3XY + 8Y + 9X + 24] \\ &= 3E[XY] + 8E[Y] + 9E[X] + 24 = \textcircled{*} \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E(XY) &= \text{Cov}(X, Y) + E(X) \cdot E(Y) \\ &= -\frac{1}{3} + 3 \cdot (-3) \\ &= -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} = 3 \cdot \left(-\frac{28}{3}\right) + 8(-3) + 9 \cdot 3 + 24$$

$$= -4 \rightarrow B$$

Oefening 7

X = honsen
 Y = poelen

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} \quad (\text{algemeen})$$

$$P_{Y|X}(1|2) = \frac{P_{X,Y}(2,1)}{P_X(2)} = \frac{0,15}{0,10 + 0,15 + 0,04 + 0,01} = 0,5 \rightarrow D$$

Oefening 8

Om te oorspronkelijk A.

Oefening 9

a) afhankelijk?

Den moet $P((X < 19) \cap (X \geq 17)) \neq P(X < 19) \cdot P(X \geq 17)$

We gaan dit met:

$$LL = 0,20 + 0,30 = 0,50$$

$$RL = (0,07 + 0,2 + 0,2 + 0,3) \cdot (0,2 + 0,3 + 0,15 + 0,08) = 0,5621$$

$LL \neq RL \Rightarrow$ Ze zijn niet afhankelijk
 \rightarrow Antw A.

Oefening 10

$$P(K) = 0,2$$

$$P(L) = 0,3$$

$$P(M) = 0,5$$

$$P(S|K) = 0,03$$

$$P(S|L) = 0,04$$

$$P(S|M) = 0,01$$

S = storing

Bereken nu: $P(M|S)$;

$$= \frac{P(S|M) \cdot P(M)}{P(S|M) \cdot P(M) + P(S|K) \cdot P(K) + P(S|L) \cdot P(L)}$$

$$= \frac{0,01 \cdot 0,5}{0,01 \cdot 0,5 + 0,03 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 0,3}$$

$$= 0,2174$$

Oefening 11

A) Jaar, een cum functie is altijd stijgend of constant maar nooit dalend.

B) ja, op $(0,1)$. (kan kan $(0,1)$)

$$c) E[F_X(x)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x) \cdot f_X(x) dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u du$$

$$= \left[\frac{F_X(x)^2}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{F_X(\infty)^2}{2} - \frac{F_X(-\infty)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{stel } u = F_X(x) \\ du = f_X(x) dx$$

d) rondt af fout. een kans is gedefinieerd op $0 \leq f_X(x) \leq 1$. Dus $-\infty$ slaat op twee. Men aan te passen naar:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \underline{0}.$$

Oefening 2

$$X \sim \log N(1, 2).$$

$$\text{dus } \mu_X = 1, \sigma_X^2 = 2.$$

$$a) \log(X) \sim N(1, 2).$$

$$P(X \leq x) = P(\log X \leq \log x)$$

$$= P\left(2 \leq \frac{\log(x) - 1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\log(X) \sim \text{norm}\left(\mu = 1, \sigma^2 = 2\right)$$

$$Z \sim \text{norm}(0, 1)$$

Dit klopt.

b) fout.

Oefening 13

$$\begin{aligned} P(X > 1 \mid X \leq 12) &= \frac{P((X > 1) \cap (X \leq 12))}{P(X \leq 12)} \\ &= \frac{0,3}{0,8} = 0,375 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad B. \end{aligned}$$

Oefening 14

c) four, per maand mogelijk dat tennis
bvb 1x per week hour of 20

Oefening 15

A.