

Opdracht 2: Simplex-algoritme - oplossen

Oefening 1-

- a) Coefficient of x_r in Current Row 0 = 0
b)

Let x_s be the variable entering the basis and x_r the variable leaving the basis. Then

$$(\text{Coefficient of } x_s \text{ in Current Row 0}) < 0$$

$$(\text{Coefficient of } x_r \text{ in Current Row 0}) = 0$$

$$(\text{Coefficient of } x_r \text{ in Pivot Row}) = 1$$

$$(\text{Coefficient of } x_s \text{ in Pivot Row}) > 0$$

After the pivot,

$$(\text{Coefficient of } x_r \text{ in New Row 0}) = \frac{-(\text{coefficient of } x_s \text{ in Current Row 0})}{(\text{Coefficient of } x_s \text{ in Current Pivot Row})} > 0$$

Thus after the pivot x_r will have a positive coefficient in row 0.

- c) Because x_r has a positive coefficient, it will not reenter the basis. On a later pivot, however, it is possible that x_r may have a negative coefficient in Row 0 and again re-enter the basis.

Oefening 2-

We herschrijven het model als volgt:

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$\text{Max } -z = -x_1 - x_2 - Ma_1 - Ma_2$$

$$\text{St } 2x_1 + x_2 + x_3 + a_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + a_2 = 2$$

Verwijder vervolgens alle artificiële variabelen uit de rij 0 om een canonieke vorm te krijgen.

We krijgen dan het volgende tableau:

Z	X1	X2	X3	A1	A2	RHS	RATIO
1	-3M+1	-2M+1	-3M	0	0	-6M	
0	2	1	1	1	0	4	4
0	1	1	2	0	1	2	1*

We now enter X3 in the basis in row 2:

Z	X1	X2	X3	A1	A2	RHS	RATIO
1	$-3M/2+1$	$-M/2+1$	0	0	$3M/2$	$-3M$	
0	$3/2$	$1/2$	0	1	$-1/2$	3	2
0	$1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	1	2^*

We now enter X1 in the basis in row 2.

Z	X1	X2	X3	A1	A2	RHS
1	0	M	$-2+3M$	0	$-1+3M$	-2
0	0	-1	-3	1	-2	0
0	1	1	2	0	1	2

This optimal tableau yields the optimal solution $Z=2$, $X1=2$, $X2=X3=0$.

Oefening 3-

- a) In standaardnotatie hebben we het volgende LP probleem

$$\text{Max } z = 10x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + s_1 = 1$$

$$20x_1 + x_2 + s_2 = 100$$

Dit impliceert dat een BFS uit twee basisvariabelen bestaat en dat we dus vier gevallen moeten beschouwen.

Basisvariabelen BFS

$$x_1, x_2 \quad x_1 = 1, x_2 = 80$$

$$x_1, s_2 \quad x_1 = 1, s_2 = 80$$

$$x_2, s_1 \quad x_2 = 100, s_1 = 1$$

$$s_1, s_2 \quad s_1 = 1, s_2 = 100$$

- b) In het eerste simplex tableau zijn s_1 en s_2 de basisvariabelen.

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	RATIO
---	-------	-------	-------	-------	-----	-------

1	-10	-1	0	0	0	
---	-----	----	---	---	---	--

0	1	0	1	0	1	1^*
---	---	---	---	---	---	-------

0	20	1	0	1	100	5
---	----	---	---	---	-----	---

Er zijn niet-basisvariabelen met negatieve coëfficiënten (in rij 0) dus de oplossing is nog niet optimaal. De ratio test geeft aan dat we s_1 als basisvariabele moeten vervangen door x_1 .

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	RATIO
1	0	-1	10	0	10	
0	1	0	1	0	1	∞
0	0	1	-20	1	80	80*

Er zijn nog steeds niet-basisvariabelen met negatieve coëfficiënten dus de oplossing is niet optimaal. De ratio test geeft aan dat we s_2 als basisvariabele moeten vervangen door x_2 .

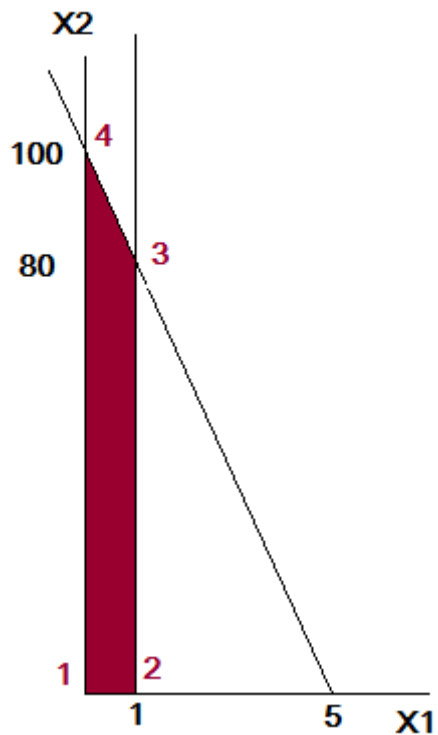
z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	RATIO
1	0	0	-10	1	90	
0	1	0	1	0	1	1*
0	0	1	-20	1	80	/

Nog steeds is de oplossing niet optimaal en vinden we dat we x_1 als basisvariabele moeten vervangen door s_1 .

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	BV
1	10	0	0	1	100	$z=100$
0	1	0	1	0	1	$s_1=1$
0	20	1	0	1	100	$x_2=100$

Gegeven dat alle niet-basisvariabelen positieve coëfficiënten hebben, mogen we besluiten dat $x_2=100$, $s_1=1$, $x_1=s_2=0$ de optimale oplossing is. Bovengaande redenering toont inderdaad aan dat we alle BFSs beschouwd hebben.

- c) Constateer op onderstaande tekening dat er 4 extreme punten zijn in de haalbaarheidsverzameling (wat tevens de 4 BFSs zijn) en dat je inderdaad alle extreme punten moet aflopen vooraleer je de optimale oplossing gevonden hebt.



Oefening 4-

LP:

$$\min z = s_1^- + 5s_2^- + 5s_3^- + 2s_1^+ + s_4^-$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32 \quad (\text{Arbeidsbeperking}) \\ & x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (\text{Product 1 Beperking}) \\ & x_2 + s_3^- - s_3^+ = 10 \quad (\text{Product 2 Beperking}) \\ & 4x_1 + 2x_2 + s_4^- - s_4^+ = 48 \quad (\text{winstbeperking}) \end{aligned}$$

Alle variabelen niet negatief

Stap 1:

$$\min z = s_1^-$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32 \quad (\text{Arbeidsbeperking}) \\ & x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (\text{Product 1 Beperking}) \\ & x_2 + s_3^- - s_3^+ = 10 \quad (\text{Product 2 Beperking}) \\ & 4x_1 + 2x_2 + s_4^- - s_4^+ = 48 \quad (\text{winstbeperking}) \\ & (+ \text{ niet-negativiteitsbeperkingen}) \end{aligned}$$

- Indien oplossing = 0 => ga naar stap 2
- Indien oplossing > 0 => kies optimale oplossing

Stap 2:

$$\min z = s_2^-$$

s.t.

$$4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32 \quad (\text{Arbeidsbeperking})$$

$$x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (\text{Product 1 Beperking})$$

$$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 10 \quad (\text{Product 2 Beperking})$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_4^- - s_4^+ = 48 \quad (\text{winstbeperking})$$

$$s_1^- = 0 \quad (\text{nl: doelstelling 1 is ok})$$

(+ niet-negativiteitsbeperkingen)

- Indien oplossing = 0 => ga naar stap 3
- Indien oplossing > 0 => kies optimale oplossing

Stap 3:

$$\min z = s_3^-$$

s.t.

$$4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32 \quad (\text{Arbeidsbeperking})$$

$$x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (\text{Product 1 Beperking})$$

$$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 10 \quad (\text{Product 2 Beperking})$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_4^- - s_4^+ = 48 \quad (\text{winstbeperking})$$

$$s_1^- = s_2^- = 0 \quad (\text{nl: doelstellingen 1 en 2 zijn ok})$$

(+ niet-negativiteitsbeperkingen)

- Indien oplossing = 0 => ga naar stap 4
- Indien oplossing > 0 => kies optimale oplossing

Stap 4:

$$\min z = s_1^+$$

s.t.

$$4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32 \quad (\text{Arbeidsbeperking})$$

$$x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (\text{Product 1 Beperking})$$

$$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 10 \quad (\text{Product 2 Beperking})$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_4^- - s_4^+ = 48 \quad (\text{winstbeperking})$$

$$s_1^- = s_2^- = s_3^- = 0 \quad (\text{nl: doelstellingen 1, 2 en 3 zijn ok})$$

(+ niet-negativiteitsbeperkingen)

- Kies optimale oplossing

(Noteer dat de winstbeperking eigenlijk overbodig is.)