

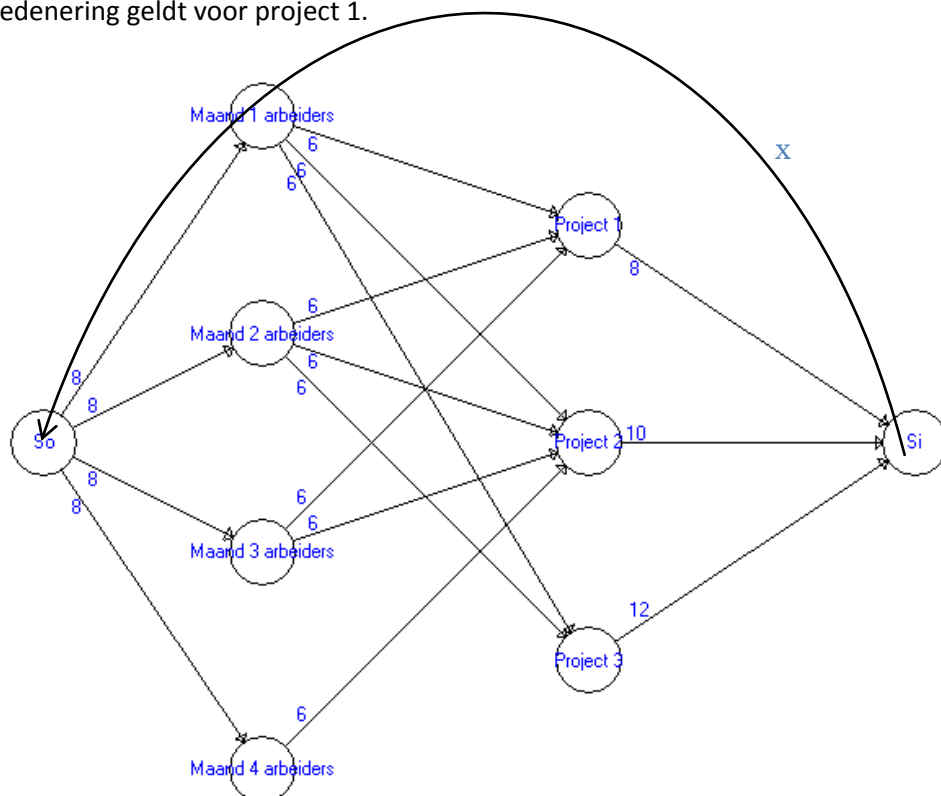
Operationeel Onderzoek

Opgave 5: oplossing

Oefening 1-

- a. Een correcte voorstelling van het maximum-flow netwerk is hieronder weergegeven. De redenering is als volgt. We beschikken over 32 maanden arbeid (4 maanden x 8 werkers). De 3 projecten samen vragen in totaal 30 maanden arbeid. Indien er geen capaciteitsbeperkingen waren, zou het dus mogelijk zijn om de projecten tijdig af te werken. Om te zien of de capaciteitsbeperkingen roet in het eten gooien, stellen we een maximum flow – probleem op, waarbij de maanden arbeid van de source naar de sink gaan. We mogen er onderweg 2 “verliezen”: als er 30 maanden arbeid aankomen in de sink kunnen de projecten tijdig afgewerkt worden. Als er minder dan 30 maanden arbeid aankomen in de sink zullen we te laat zijn.

De capaciteitsbeperkingen per project worden dan weergegeven door de pijlen tussen de maanden en de projecten. Bemerk dat er voor project 3 enkel pijlen vertrekken uit maand 1 en 2, want het project moet binnen de 2 maanden afgewerkt zijn. Een analoge redenering geldt voor project 1.



Dus: bij maximum – flow problemen steeds nadenken wat uit de source naar de sink vloeit, en dan komt het netwerk vanzelf. Als je een netwerkvoorstelling had waarbij er uit de source geen 32 eenheden vertrokken of er in de sink geen 30 eenheden aankwamen, dan is je voorstelling zeker fout. Zorg dat je bovenstaande uitleg goed verstaat om in te zien waarom.

- b. De LP-voorstelling van dit maximum-flow probleem is de volgende:

Max x_0

st

(capaciteitsbeperkingen)

$$X_{SoM1} \leq 8$$

$$X_{SoM2} \leq 8$$

$$X_{SoM3} \leq 8$$

$$X_{SoM4} \leq 8$$

$$X_{M1P1} \leq 6$$

$$X_{M1P2} \leq 6$$

$$X_{M1P3} \leq 6$$

$$X_{M2P1} \leq 6$$

$$X_{M2P2} \leq 6$$

$$X_{M2P3} \leq 6$$

$$X_{M3P1} \leq 6$$

$$X_{M3P2} \leq 6$$

$$X_{M4P2} \leq 6$$

$$X_{P1Si} \leq 8$$

$$X_{P2Si} \leq 10$$

$$X_{P3Si} \leq 12$$

(stroombehoudbeperkingen)

$$X_0 = X_{SoM1} + X_{SoM2} + X_{SoM3} + X_{SoM4}$$

$$X_{SoM1} = X_{M1P1} + X_{M1P2} + X_{M1P3}$$

$$X_{SoM2} = X_{M2P1} + X_{M2P2} + X_{M2P3}$$

$$X_{SoM3} = X_{M3P1} + X_{M3P2}$$

$$X_{SoM4} = X_{M4P2}$$

$$X_{M1P1} + X_{M2P1} + X_{M3P1} = X_{P1Si}$$

$$X_{M1P2} + X_{M2P2} + X_{M3P2} + X_{M4P2} = X_{P2Si}$$

$$X_{M1P3} + X_{M2P3} = X_{P3Si}$$

$$X_{P1Si} + X_{P2Si} + X_{P3Si} = X_0$$

- c. Opgelet bij het ingeven in Lindo: alle variabelen moeten steeds aan de linkerhandzijde van de beperkingen staan!

```
Max X0
st
XSoM1 < 8
XSoM2 < 8
XSoM3 < 8
XSoM4 < 8
XM1P1 < 6
XM1P2 < 6
XM1P3 < 6
XM2P1 < 6
XM2P2 < 6
XM2P3 < 6
XM3P1 < 6
XM3P2 < 6
XM4P2 < 6
XP1Si < 8
XP2Si < 10
XP3Si < 12
X0-XSoM1-XSoM2-XSoM3-XSoM4=0
XSoM1-XM1P1-XM1P2-XM1P3=0
XSoM2-XM2P1-XM2P2-XM2P3=0
XSoM3-XM3P1-XM3P2=0
XSoM4-XM4P2=0
XM1P1+XM2P1+XM3P1-XP1Si=0
XM1P2+XM2P2+XM3P2+XM4P2-XP2Si=0
XM1P3+XM2P3-XP3Si=0
XP1Si+XP2Si+XP3Si-X0=0
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 8

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 30.000000

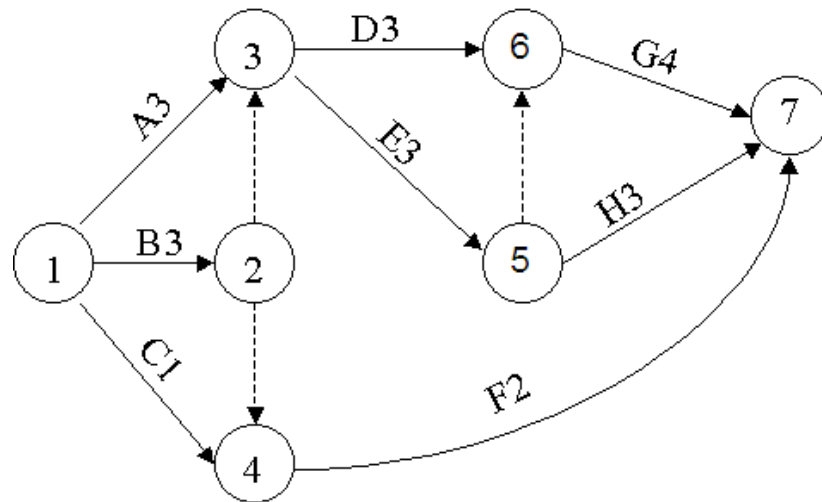
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X0	30.000000	0.000000
XSOM1	8.000000	0.000000
XSOM2	8.000000	0.000000
XSOM3	8.000000	0.000000
XSOM4	6.000000	0.000000
XM1P1	2.000000	0.000000
XM1P2	0.000000	0.000000
XM1P3	6.000000	0.000000
XM2P1	2.000000	0.000000
XM2P2	0.000000	0.000000
XM2P3	6.000000	0.000000
XM3P1	4.000000	0.000000
XM3P2	4.000000	0.000000
XM4P2	6.000000	0.000000
XP1SI	8.000000	0.000000
XP2SI	10.000000	0.000000
XP3SI	12.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	2.000000	0.000000
6)	4.000000	0.000000
7)	6.000000	0.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	4.000000	0.000000
10)	6.000000	0.000000
11)	0.000000	0.000000
12)	2.000000	0.000000
13)	2.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	1.000000
16)	0.000000	1.000000
17)	0.000000	1.000000
18)	0.000000	1.000000
19)	0.000000	1.000000
20)	0.000000	1.000000
21)	0.000000	1.000000
22)	0.000000	1.000000
23)	0.000000	1.000000
24)	0.000000	1.000000
25)	0.000000	1.000000

- d. Interpretatie: de optimale doelfunctiewaarde is 30, dus alle projecten kunnen tijdig afgewerkt worden. De optimale oplossing geeft weer hoe de middelen moeten ingezet worden om dit te bereiken: in elke maand moeten 8 arbeiders werken, behalve in de laatste (6 arbeiders). In maand 1 en 2 werken 2 arbeiders aan project 1 en 6 aan project 3. In maand 3 werken er 4 aan project 1 en 4 aan project 2. In de laatste maand moeten 6 arbeiders werken aan project 2.

Oefening 2-

- a. Het projectnetwerk is het volgende:



b. ET en LT voor elk knooppunt:

- $ET(1) = 0;$ $LT(1) = 0;$
- $ET(2) = 3;$ $LT(2) = 3;$
- $ET(3) = 3;$ $LT(3) = 3;$
- $ET(4) = 3;$ $LT(4) = 8;$
- $ET(5) = 6;$ $LT(5) = 6;$
- $ET(6) = 6;$ $LT(6) = 6;$
- $ET(7) = 10;$ $LT(7) = 10;$

Total Float voor elke activiteit:

- $TF(A) = TF(1,3) = LT(3) - ET(1) - 3 = 0;$
- $TF(B) = TF(1,2) = LT(2) - ET(1) - 3 = 0;$
- $TF(C) = TF(1,4) = LT(4) - ET(1) - 1 = 7;$
- $TF(D) = TF(3,6) = LT(6) - ET(3) - 3 = 0;$
- $TF(E) = TF(3,5) = LT(5) - ET(3) - 3 = 0;$
- $TF(F) = TF(4,7) = LT(7) - ET(4) - 2 = 5;$
- $TF(G) = TF(6,7) = LT(7) - ET(6) - 4 = 0;$
- $TF(H) = TF(5,7) = LT(7) - ET(5) - 3 = 1;$
- $TF(dummy1) = TF(2,3) = LT(3) - ET(2) - 0 = 0;$
- $TF(dummy2) = TF(2,4) = LT(4) - ET(2) - 0 = 5;$
- $TF(dummy3) = TF(5,6) = LT(6) - ET(5) - 0 = 0;$

De activiteiten met $TF = 0$ zijn kritieke activiteiten. Dit zijn de activiteiten A, B, D, E en G (en dummy1 & dummy2). Dit betekent dat we volgende kritieke paden hebben: A-D-G, A-E-G, B-D-G, en B-E-G, allemaal met lengte 10.

c. De LP-formulering is de volgende:

```

min x7-x1
st
x3 ≥ x1 + 3
x2 ≥ x1 + 3
x4 ≥ x1 + 1
x6 ≥ x3 + 3
x5 ≥ x3 + 3
x7 ≥ x4 + 2
x7 ≥ x6 + 4
x7 ≥ x5 + 3
x3 ≥ x2
x4 ≥ x2
x6 ≥ x5
alle variabelen ≥ 0

```

Om dit in Lindo in te geven moeten alle variabelen naar de linkerhandzijde. Dus:

Dit geeft de volgende output:

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      9

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      10.000000

      VARIABLE               VALUE               REDUCED COST
      X7                   10.000000               0.000000
      X1                     0.000000               0.000000
      X3                     3.000000               0.000000
      X2                     3.000000               0.000000
      X4                     3.000000               0.000000
      X6                     6.000000               0.000000
      X5                     6.000000               0.000000

      ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)           0.000000        -1.000000
      3)           0.000000         0.000000
      4)           2.000000         0.000000
      5)           0.000000         0.000000
      6)           0.000000        -1.000000
      7)           5.000000         0.000000
      8)           0.000000        -1.000000
      9)           1.000000         0.000000
     10)           0.000000         0.000000
     11)           0.000000         0.000000
     12)           0.000000        -1.000000

NO. ITERATIONS=      9

```

Lindo heeft dus het kritieke pad A-E-dummy-G gevonden (we weten reeds dat dit slechts één van de 4 oplossingen is). Dit kunnen we zien aan de duale prijs, die -1 is voor een activiteit op het kritieke pad: als deze activiteit 1 dag vertraagd wordt, wordt het hele project 1 dag vertraagd.

d. De LP-formulering voor het projectcrashing-probleem is de volgende:

$$\min z = 80 A + 60 B + 30 C + 60 D + 40 E + 30 F + 20 G + 10 H$$

st

$$A \leq 2$$

$$B \leq 2$$

$$C \leq 2$$

$$D \leq 2$$

$$E \leq 2$$

$$F \leq 2$$

$$G \leq 2$$

$$H \leq 2$$

$$x_3 \geq x_1 + 3 - A$$

$$x_2 \geq x_1 + 3 - B$$

$$x_4 \geq x_1 + 1 - C$$

$$x_6 \geq x_3 + 3 - D$$

$$x_5 \geq x_3 + 3 - E$$

$$x_7 \geq x_4 + 2 - F$$

$$x_7 \geq x_6 + 4 - G$$

$$x_7 \geq x_5 + 3 - H$$

$$x_3 \geq x_2$$

$$x_4 \geq x_2$$

$$x_6 \geq x_5$$

$$x_7 - x_1 \leq 6$$

$$\text{alle variabelen} \geq 0$$

Bemerk opnieuw dat je alle variabelen naar de linkerkant moet brengen als je dit zou willen ingeven in Lindo. De minimale kost is 250.

Oefening 3-

a. We doorlopen het algoritme stap voor stap:

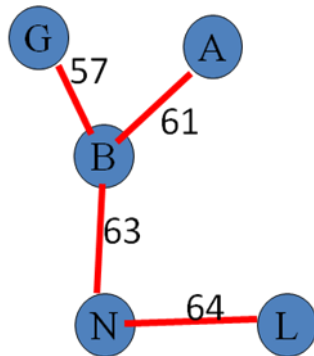
Stap 1: We kunnen starten uit eender welke stad. Neem bijvoorbeeld Antwerpen. De kortste verbinding is die naar Brussel (61 km). We verbinden Antwerpen en Brussel en voegen Brussel toe.

Stap 2: Vanuit de verzameling {Antwerpen, Brussel} is de kortste verbinding die naar Gent, vanuit Brussel (57 km). We verbinden Brussel en Gent en voegen Gent toe.

Stap 3: Vanuit de verzameling {Antwerpen, Brussel, Gent} is de kortste verbinding die naar Namen, vanuit Brussel (63 km). We verbinden Brussel en Namen en voegen Namen toe.

Stap 4 : Vanuit de verzameling {Antwerpen, Brussel, Gent, Namen} is de kortste verbinding naar enig overgebleven stad Luik die vanuit Namen (64 km). We verbinden Namen en Luik en voegen Luik toe.

Het netwerk is dan het onderstaande, met totale afstand gelijk aan 245 km.



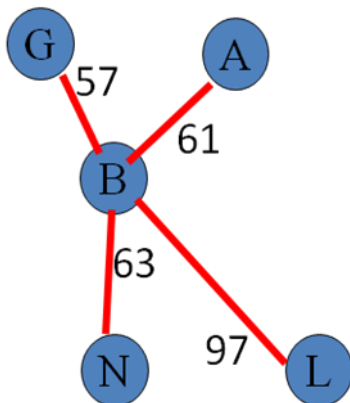
- b. Wanneer Gent-Antwerpen en Namen-Luik niet toegestaan zijn, verloopt het algoritme als volgt (bij start uit Antwerpen):

Stap 1: Verbind Antwerpen met Brussel. We hebben nu {Antwerpen, Brussel}

Stap 2: Verbind Brussel met Gent. We hebben nu {Antwerpen, Brussel, Gent}

Stap 3: Verbind Brussel met Namen. We hebben nu {Antwerpen, Brussel, Gent, Namen}

Stap 4: in plaats van Luik te verbinden vanuit Namen (64 km), verbinden we vanuit Brussel (97km). Ons netwerk wordt hierdoor 33 km langer, met name 278 km.



Oefening 4-

Node 1 = beginning of year 1, Node 7 = end of year 6 or beginning of year 7

$c_{12} = 3300$, $c_{13} = 4800$, $c_{14} = 7600$, $c_{15} = 9800$, $c_{16} = 12,400$, $c_{17} = 15,600$, $c_{23} = 3300$, $c_{24} = 4800$, $c_{25} = 7600$, $c_{26} = 9800$, $c_{27} = 12,400$, $c_{34} = 3300$, $c_{35} = 4800$, $c_{36} = 7600$, $c_{37} = 9800$, $c_{45} = 3300$, $c_{46} = 4800$, $c_{47} = 7600$, $c_{56} = 3300$, $c_{57} = 4800$, $c_{67} = 3300$

	2	3	4	5	6	7	
1	3300	4800	7600	9800	12400	15600	1
2	0	3300	4800	7600	9800	12400	1
3	M	0	3300	4800	7600	9800	1
4	M	M	0	3300	4800	7600	1
5	M	M	M	0	3300	4800	1
6	M	M	M	M	0	3300	1
	1	1	1	1	1	1	