Operationeel Onderzoek
Opgave 7
OPLOSSING

(bij vragen mail naar: Lien.Perdu@kuleuven-kortrijk.be)

Oefening 1 –

$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 + 2 x_3 + x_2x_3 – x_1^2 - x_2^2 – x_3^2$

$$H = \begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

1e principale minors zijn -2, -2, -2, allen <0.

2e principale minors zijn allen >0

$$\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3 \qquad \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 \qquad \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4$$

3e principale minor: -6 (= -2((-2)*(-2)-(1)*(1))) <0.

Dus $f(x_1, x_2, x_3)$ is een concave functie over R^3.

$f(x_1, x_2, x_3)$ is een concave functie over S als en slechts als voor alle x in S en k=1,2,…n, elke k^e principale minor van de Hessiaan verschillend van 0 hetzelfde teken heeft als $(-1)^k$.

Eigenschap ter controle: De som van concave functies is ook concaaf.

We herschrijven de functie: $x_1– x_1^2 - x_2^2 + 2 x_3 + x_2x_3 – x_3^2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ Eerste principale minor= -2 en -2

Tweede principale minor = 4-1 = 3

$X_1 – x_1^2$

$f''(x) = -2 < 0$ dus concaaf

Som van 2 concave functies is concaaf.

Oefening 2 –

$L = 30x_1^{1/2} + 20x_2^{1/2} + \lambda\,(100 - x_1 - x_2) - x_1 - x_2$

(1) $\partial L/\partial x_1 = 15x_1^{-1/2} - \lambda - 1 = 0$

(2) $\partial L/\partial x_2 = 10x_2^{-1/2} - \lambda - 1 = 0$

(3) $\partial L/\partial \lambda = 100 - x_1 - x_2 = 0$

Door (1) en (2), $x_1 = 225/(\lambda + 1)^2$ en $x_2 = 100/(\lambda + 1)^2$.

Dan levert beperking(3) $325/(\lambda + 1)^2 = 100$ of $(\lambda + 1)^2 = 3.25$ en

$\lambda = .80$. Nu vinden we dat $x_1 = 225/3.25 = 900/13 = 69.23$ en

$x_2 = 400/13 = 30.77$.

Oefening 3 –

a) Min $0.20x_1^2 + 0.08x_2^2 + 0.18x_3^2 + 0.10x_1x_2 + 0.04x_1x_3 + 0.06x_2x_3$

s.t. $0.14\,x_1 + 0.11\,x_2 + 0.10\,x_3 \geq 270$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Oefening 4–

9)

A : gemiddelde tijd op de ondergrondse = gemiddelde tijd op de weg

40 min = 20 + 5x min → x = 4 → 4000 mensen nemen de gewone weg

B : minimaliseer de gemiddelde tijd dat een persoon onderweg is :

Stel x = aantal mensen op de weg ; 10000 – x = aantal mensen via de ondergrondse

Min $(10\,000 - x)*40 + x*(20 + 5x) = 400000 - 20x + 5x^2 = f(x)$

$f'(x) = 10x - 20 = 0$ → x =2 → 2000 mensen nemen de gewone weg.

Merk op : dit is inderdaad beter dan als 4000 mensen de gewone weg nemen (gemiddelde van 40min) want het gemiddelde is hier (8000*40 + 2000*30) / 10000 = 38 minuten.

<u>Oefening 5–</u>

8) min $2\pi r^2 + 2\pi rh$
st $\pi r^2 h = 26$

$h=26/(\pi r^2) \rightarrow$ min $2\pi r^2 + 52\, r^{-1}$
afleiden naar r en gelijkstellen aan 0 geeft : $4\pi r - 52\, r^{-2} = 0 \rightarrow r^3 = 52/(4\pi)$
$h/r=26/(\pi r^3)$ met $r^3 = 52/(4\pi)$ geeft : $h/r = 2$