

Toepassingen van Operationeel Onderzoek – Examen 2011

IS TABUSEARCH/KOLOMGENERATIE TOE TE PASSEN OP ONZE CASE? (ZIE PAPER ELSEVIER)

- lokale zoekmethode: OMGEVING van de oplossing zoeken, “verwissel 2 mannetjes en kijk wat er gebeurt”
- kolomgeneratie: wiskundig model, variabelen

Opgave 1

Beschouw het zogenaamde rechthoek-stapelings probleem. Gegeven zijn n rechthoeken, elk met een gegeven lengte l_i , en een gegeven breedte b_i , $i = 1; 2; \dots; n$. Deze rechthoeken moeten in stapels (groepen) verdeeld worden zodanig dat het mogelijk is om de rechthoeken binnen een stapel te ordenen volgens een piramide. Met andere woorden, voor elk tweetal rechthoeken i en j binnen dezelfde stapel moet gelden:

$((l_i \leq l_j) \text{ EN } (b_i \leq b_j)) \text{ OF } ((l_j \leq l_i) \text{ EN } (b_j \leq b_i))$:

Het probleem is om de rechthoeken in zo min mogelijk stapels te verdelen.

- Laat zien hoe dit probleem te formuleren is als een min-cost flow probleem (geef geen wiskundige formulering).
- Kan de constructie onder a. aangepast worden wanneer een 90° rotatie van de rechthoeken mogelijk is? Zo ja, hoe; zo nee, waarom niet?
- Kan de constructie onder a. aangepast worden wanneer elke stapel niet meer dan B (een gegeven aantal) rechthoeken kan bevatten? Zo ja, hoe; zo nee, waarom niet?

a/ Een informele beschrijving van het min-cost flow netwerk.

Neem een source knoop, en een sink knoop. Aanbod van stroom in source knoop: $+n$, vraag van stroom in sink knoop: $-n$ (n is het aantal rechthoeken). Verbind de source met de sink via een pijl met kost 0, en cap oneindig. Voeg voor elke rechthoek i de twee knopen i' , en i'' - zoals beschreven in de hint - toe. Wanneer rechthoek j op rechthoek i past, trek een pijl van i'' naar j' met kost 0, en cap 1. Trek een pijl van de source naar elke i' met kost 0, cap 1, en trek een pijl van elke i'' naar de sink met kost 1, cap 1.

Een min-cost flow in dit netwerk stuurt n eenheden stroom weg uit de source. Die stroom zal, vanwege de kosten, zoveel mogelijk via de directe pijl tussen source en sink willen gaan. Alleen ... er moet 1 eenheid stroom over de pijl tussen elke i' en i'' lopen. Het netwerk zal daar dus voor zorgen door zo min mogelijk eenheden stroom uit de source niet rechtstreeks over de directe pijl te laten gaan, anders gezegd, elke eenheid stroom die niet over de directe pijl gaat, gaat via een aantal rechthoeken die kennelijk op elkaar passen, en dus een stapel vormen. Het aantal stapels dat gevormd wordt is dan gelijk aan de kost van de flow.

b/ Ja, het netwerk kan aangepast worden indien een 90 graden rotatie van de rechthoeken mogelijk is. Enkel de voorwaarde om een pijl van i'' naar j' te trekken wijzigt.

c/ Nee, je kan geen lower bound op de stapels in het netwerk krijgen omdat je in het netwerk nergens weergeeft hoeveel elementen in een stapel terechtkomen

Opgave 2

Beschouw het bin-covering probleem. Gegeven zijn n items, elk met een gegeven grootte s_i , waarbij $0 < s_i \leq 1$ voor $i = 1; \dots; n$. Deze items dienen toegewezen te worden aan bins, die elk capaciteit 1 hebben. Dit moet zo gebeuren dat de som van de grootte's van de items toegewezen aan een bin tenminste 1 is, dat wil zeggen, de capaciteit van elke bin moet 'gecovered' worden door de items die eraan toegewezen worden. Het probleem is nu om zoveel mogelijk bins te 'coveren'.

- Geef een wiskundige formulering van dit probleem die gebruik maakt van (onder meer) de volgende binaire beslissingsvariabelen: x_{ik} is 1 dan en slechts dan wanneer item i aan bin k wordt toegewezen, voor $i = 1; \dots; n$, $k = 1; \dots$.
- Een alternatieve formulering van het probleem maakt gebruik van een binaire variabele die correspondeert met een verzameling items. Hoe ziet een dergelijke formulering eruit?
- Schets kort een oplossingsmethode voor de formulering onder b. die gebruik maakt van kolomgeneratie. Hoe ziet het pricing probleem eruit?
- Welke branching regel stelt u voor? Welke gevolgen heeft die branching regel voor het pricing probleem?
- Wat zijn - kort - de voor- en nadelen van het oplossen van de formulering onder b, vergeleken met het oplossen van de formulering onder a?

a/ $x_{ik}=1$ als item i aan bin k wordt toegewezen, 0 anders
 $y_k=1$ als bin k gecovered is, 0 anders

max $\sum_k y_k$
 subject to
 $\sum_i s_i x_{ik} \geq y_k$ for all k een bin is enkel gecovered als inhoud ≥ 1
 $\sum_k x_{ik} \leq 1$ for all i elk item max 1 keer
 $x_{ik}, y_k \in \{0,1\}$

b/ beschouw elke set s waarvoor $\sum_{i \in s} s_i \geq 1$, definieer dan volgende variabele

$x_s=1$ als set s aan een bin toegewezen wordt, 0 anders
 noot: het maakt niet uit aan welke bin, aangezien de bins identiek zijn

Max $\sum_s x_s$
 Subject to
 $\sum_{s: i \in s} x_s \leq 1$ for all i
 $x_s \in \{0,1\}$

c/ Bij een kolomgeneratie aanpak vertrek je van de LP-relaxatie van het model in b\ en een beperkte set van variabelen. Dit los je op en mbv de duaal ga je dan na of de gevonden oplossing optimaal is.

De duaal:
 Min $\sum_i u_i$
 Subject to
 $\sum_{i: i \in s} u_i \geq 1$ for all s
 $u_i \geq 0$

Een geschonden beperking in de duaal kan je vinden door na te gaan of er een set s bestaat waarvoor $\sum_{i: i \in s} u_i < 1$, dus door het volgende probleem op te lossen:

Min $\sum_i u_i a_i$
St
 $\sum_i s_i a_i \geq 1$
 $a_i \in \{0,1\}$

Dit is het pricing probleem en kan je herkennen als zijnde een knapsack probleem. Indien het minimum voor dit probleem kleiner is dan 1 heb je een geschonden beperking gevonden en voeg je de set toe aan de primaal, anders heb je het optimum voor de lp-relaxatie bereikt.

d/ Je kan branchen als volgt: items i en j zitten samen in een bin, of niet. Dit heeft als gevolg dat je in het pricing probleem extra beperkingen zal moeten toevoegen die daarmee rekening houden.

e/ Je kan kolomgeneratie toepassen, dus je hoeft niet de hele set van variabelen te beschouwen.

Je hebt een sterkere formulering (betere LP-relaxatie).

Nadeel is dat je nog branch en price moet toepassen indien je een niet-integer oplossing krijgt, je hebt een alternatieve branching regel nodig.

