Wiskunde voor Bedrijfswetenschappen A
VOORBEELDEXAMEN 2019-2020

Oplossingen

1.

a. Jaarlijkse groeifactor: $g_J = 1 - 0.152 = 0.848$;
   5-jaarlijkse groeifactor: $g_{5Y} = 0.848^5 \approx 0.4385$
   5-jaarlijks groeipercentage: $p_{5J} = 100 \cdot (g_{5J} - 1) \approx -56.15$
   Antwoord: afname met 56.15%

b. Gemiddelde jaarlijkse opbrengst volgt een exponentiële groei met beginwaarde 350 en groeifactor 0.848 en dus $G(t) = 350 \cdot 0.848^t$.

c. We lossen $G(t) = 250$ op naar t:

$$350 \cdot 0.848^t = 250 \to 0.848^t = \frac{250}{350} \to t \cdot \ln(0.848) = \ln\left(5/7\right)$$

$$\to t = \ln\left(5/7\right) / \ln(0.848) \approx 2.0408$$

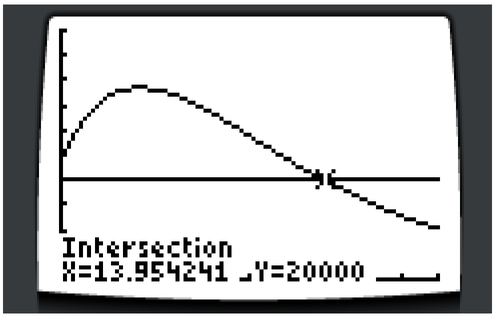
   Antwoord: na iets meer dan 2 jaar sinds 2005, dus in 2007.

d. Het aantal gsm-gebruikers groeit lineair met een beginwaarde van 68 (miljoen) en een jaarlijkse groeiterm van 36 (miljoen) en dus $A(t) = 68 + 36t$.

e. We hebben:

$$TO(t) = A(t) \cdot G(t) = 350 \cdot (68 + 36t) \cdot 0.848^t.$$

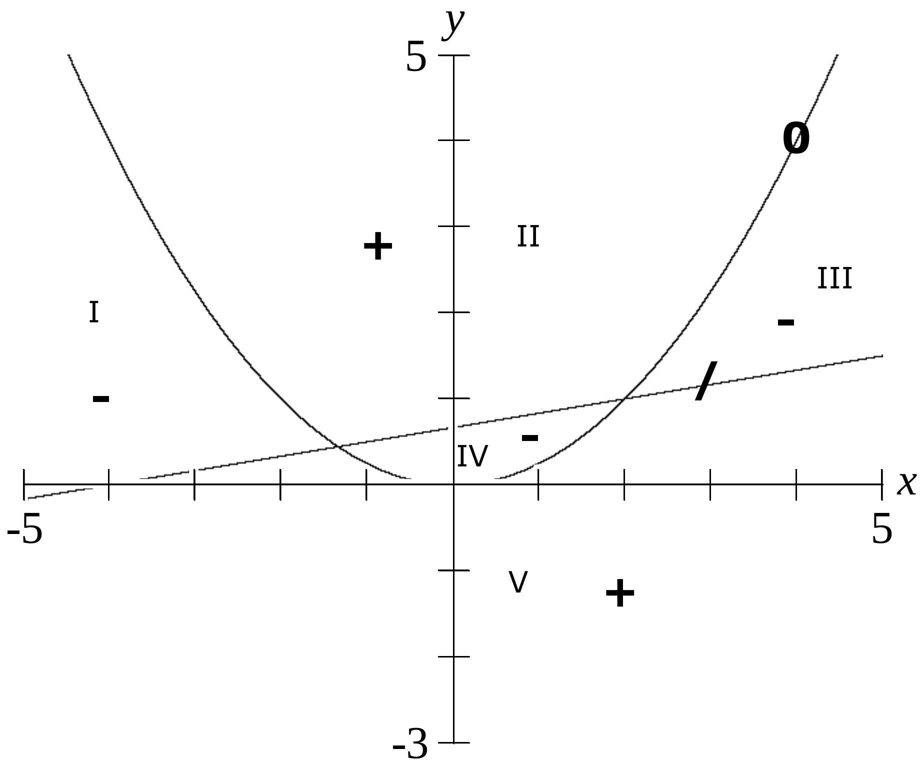
f. We voeren het functievoorschrift in het rekentoestel in:
   Y_1 = 350*(68+36*X)*0.848^X
   en kiezen een gepast venster, bvb.
   Xmin = 0
   Xmax = 20
   Xscl = 2
   Ymin = 0
   Ymax = 50 000
   Yscl = 5000
   Voeg ook de horizontale rechte Y = 20 000 toe aan de grafiek :
   Y_2 = 20 000.
   De grafiek ziet er dan uit als volgt:



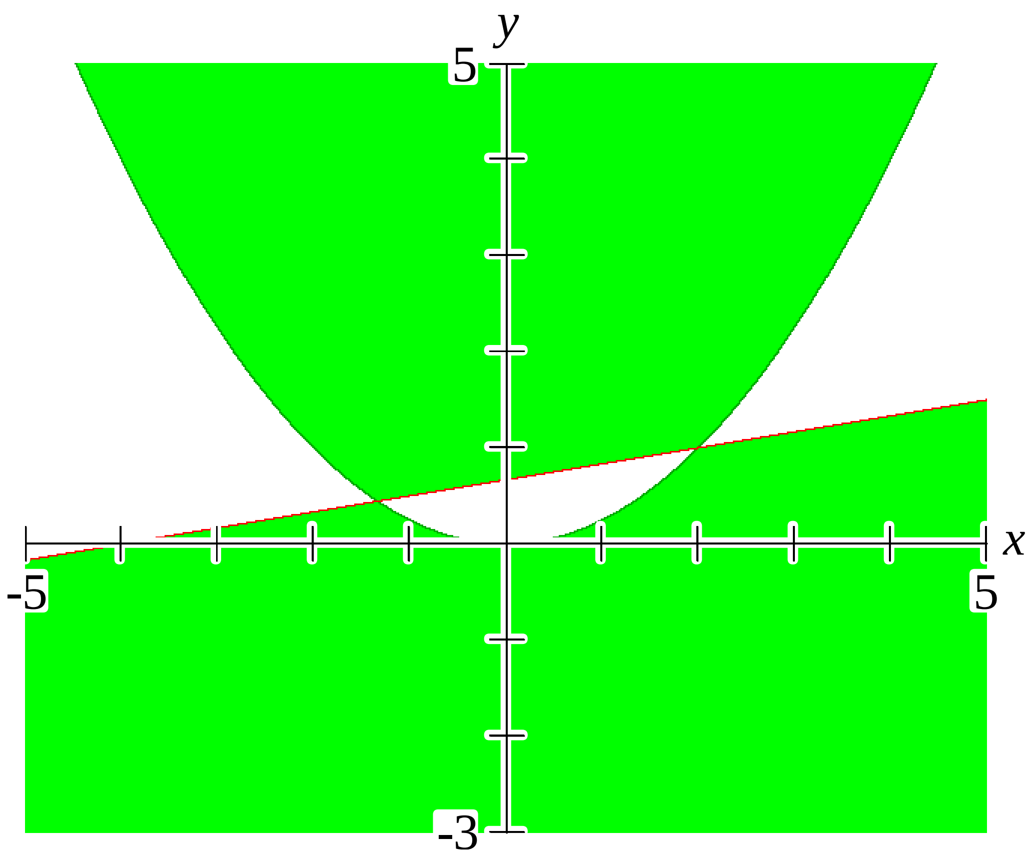
en met CALC>5. Intersect vinden we het snijpunt X = 13.954241 en Y = 20 000. Omdat de grafiek van de opbrengstfunctie lager ligt dan de horizontale rechte Y = 20 000 voor X-waarden groter dan 13.95…, besluiten we dat de totale jaarlijkse opbrengst voor de Chinese telecombedrijven minder dan 20 000 miljoen dollar bedraagt vanaf het jaar 2019 ($\approx$ 2005 + 13.95).

(Let op: als je de grafiek zoals je rekentoestel die toont overtekent, verwachten we dat je de assen benoemt (t voor de horizontale en TO voor de verticale), dat je een schaal weergeeft op elk van de assen en dat je de kromme niet tekent voor negatieve waarden voor de tijd.)

2. De variabelen x en y hebben geen betekenis, we moeten dus enkel kijken naar beperkingen omwille van het functievoorschrift.
   - We kunnen niet delen door 0 en dus: $x-6y+4\neq 0$. We moeten dus alle punten uitsluiten op de rechte met impliciete vergelijking $x-6y+4=0$ en expliciete vergelijking $y=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$. (Twee punten op de rechte zijn bvb. (-4,0) en (2,1).)
   - We kunnen geen vierkantswortel nemen uit een negatief getal en dus $\frac{x^2-4y}{x-6y+4}\geq 0$. Om deze ongelijkheid op te lossen doen we een tekenonderzoek van de functie $g(x,y)=\frac{x^2-4y}{x-6y+4}$.
     - Domein van g = alle punten in het vlak met uitzondering van degene op de rechte $x-6y+4=0$.
     - Nulpunten van $g: x^2-4y=0$ of $y=x^2/4$. Dit zijn de punten op een parabool.
     - Tekens: de rechte en de parabool verdelen het vlak in vijf gebieden (zie tekening hieronder). We testen het teken van g op elk van deze gebieden apart:
       - I: $g(-5{,}0)=-25<0$
       - II: $g(0{,}1)=2>0$
       - III: $g(4{,}2)=-2<0$
       - IV: $g(0{,}0.25)=-0.4<0$
       - V: $g(0,-1)=0.4>0$



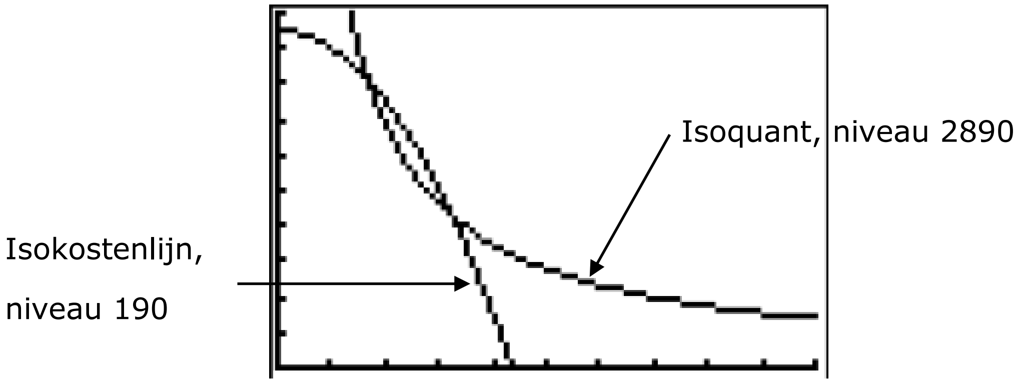
De oplossing van de ongelijkheid bestaat dus uit alle punten waar de functie g een positief teken heeft of gelijk is aan nul: dat zijn de gebieden II en V en de punten op de parabool die niet op de rechte gelegen zijn. Dit is ook het domein van f: in onderstaande tekening is dit in het groen aangegeven.



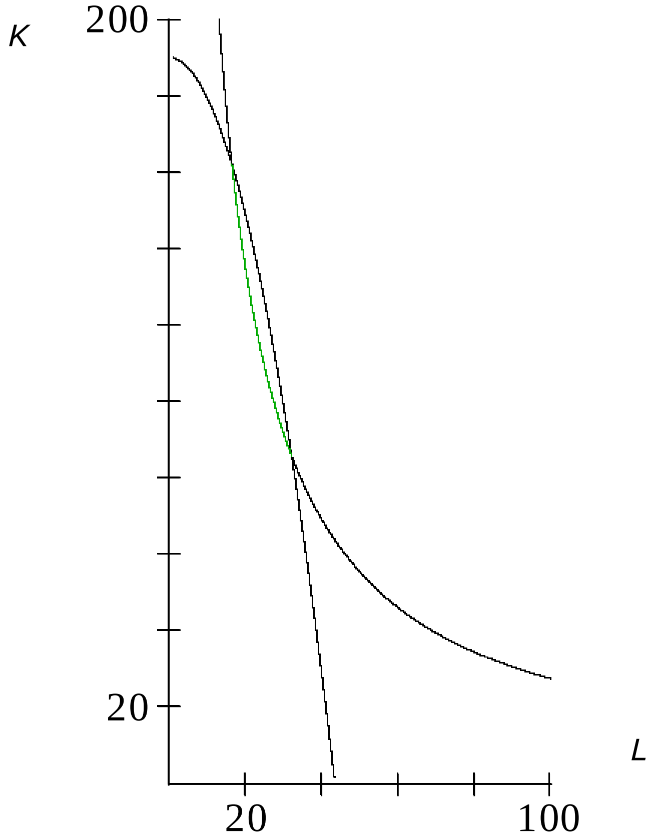
3. We willen een productie van *exact* 2890 eenheden. De gezochte combinaties (L, K) behoren dus tot de isoquant van niveau 2890: $2890 = K + L + KL$. Deze heeft expliciete vergelijking $K = \frac{2890-L}{1+L}$.

   Anderzijds moeten de kosten *minder* zijn dan 190. Daartoe schrijven we de expliciete vergelijking op van de isokostenlijn van niveau a:
   $K = a - 0.1L^2$. Dit zijn parabolen die voor hogere niveaus hoger gelegen zijn. De gezochte combinaties liggen dus *onder* de isokostenlijn van niveau 190 met vergelijking $K = 190 - 0.1L^2$.

   We geven deze functievoorschriften in de GRM in en laten een tekening maken. Een geschikt window is bijvoorbeeld $L \in [0,100], K \in [0,200]$. (Omdat L en K hoeveelheden voorstellen, mogen ze enkel positieve waarden aannemen.)



   De gezochte combinaties liggen dus op de isoquant en onder de isokostenlijn (de parabool) – dit zijn de combinaties in het groen hieronder. (De snijpunten van de twee krommen horen niet bij de oplossing.)



4.

a. Het voorschrift van de lineaire functie is $V = f(U, p) = aU + bp + c$, waarbij de parameters a, b en c nog moeten bepaald worden.

- De coëfficiënt van U beschrijft de verandering in verkoopcijfer, ΔV, bij een verhoging met één eenheid van de verkoop-uitgave, $\Delta U = 1$. Omdat hogere uitgaven aan reclame en promotie moeten resulteren in een hogere verkoop verwachten we een positief teken voor de coëfficiënt a.
- De coëfficiënt van p beschrijft de verandering in verkoopcijfer, ΔV, bij een verhoging met één eenheid van de prijs, $\Delta p = 1$. Omdat een hogere prijs resulteert in lagere verkoopcijfers verwachten we een negatief teken voor de coëfficiënt b.

b. Van de figuur kunnen we het volgende aflezen:

$$U_1 = 0, p_1 = 2, V_1 = 2$$
$$U_2 = 0, p_2 = 4, V_2 = 1$$
$$U_3 = 4, p_3 = 4, V_3 = 2$$

Bij overgang van punt 1 naar punt 2 blijft de U-coördinaat constant en kunnen we de betekenis van de coëfficiënt b gebruiken:

$$b = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{-1}{2}$$

Bij de overgang van punt 2 naar punt 3 blijft de p-coördinaat constant en kunnen we dus de betekenis van de coëfficiënt a gebruiken:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta U} = \frac{1}{4}.$$

Bijgevolg is $V = 0,25U - 0,5p + c$. Door hierin het eerste punt in te vullen krijgen we $c = 3$. De gezochte vergelijking is dus

$$V = 0,25U - 0,5p + 3.$$

Merk op dat de parameters a en b de verwachte tekens hebben!

(Je kan deze vraag ook oplossen via een lineair stelsel met 3 vergelijkingen en 3 onbekenden dat je bekomt uit de gelijkheden $1 = f(0,4)$, $2 = f(0,2)$ en $2 = f(4,4)$.)

5.

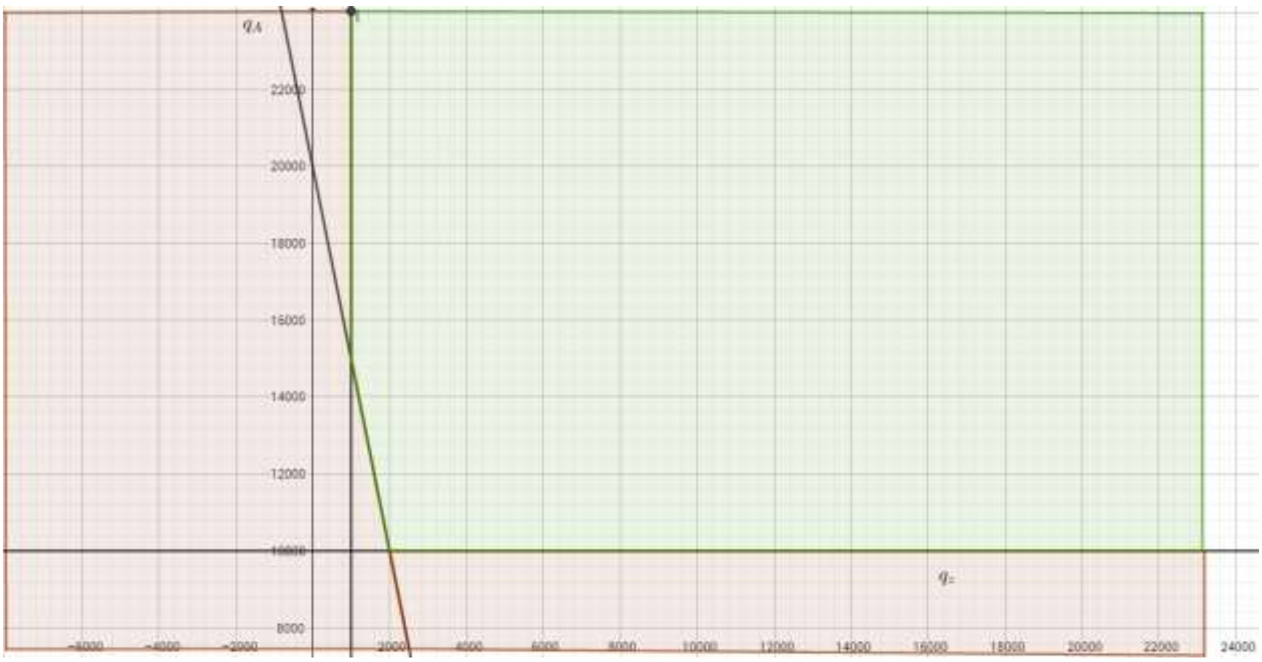
a. Definieer:

- $q_A =$ het aantal liter aangelengd sinaasappelsap
- $q_Z =$ het aantal liter zuiver sinaasappelsap

De beperkingen zijn dan:

- Hoeveelheden zijn positief: $q_A \geq 0, q_Z \geq 0$
- Toekomstige vraag: $q_A \geq 10\,000, q_Z \geq 1000$
- Contractuele aankoopverplichtingen voor sinaasappels: $10q_A + 50q_Z \geq 200\,000$

Grafisch geeft dit het groene gebied in onderstaande figuur (met q_Z op de horizontale en q_A op de verticale as):



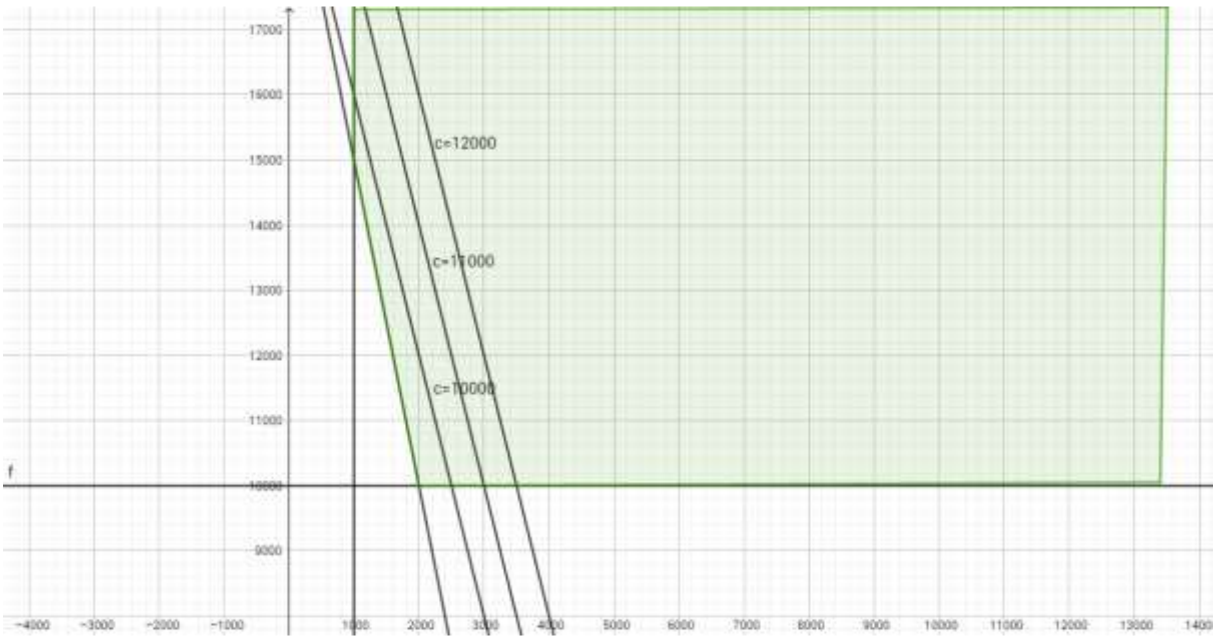
b. De totale kost wordt gegeven door onderstaande functie

$$TK(q_Z, q_A) = 2q_Z + 0.5q_A$$

De vergelijking van de niveaukromme bij niveau c is $q_A = -4q_Z + 2c$.

We zien dat dit evenwijdige (delen van) rechten zijn met gemeenschappelijke rico -4 en dat een hoger kostenniveau c een hoger intercept (en dus een hoger gelegen rechte) oplevert.

Op onderstaande tekening zijn de niveaukrommen van respectievelijk niveau $c = 10\,000, 11\,000, 12\,000$ gegeven.



Minimale kost correspondeert dus met een rechte met rico -4 die zo laag mogelijk gelegen is. Op de tekening lezen we af dat het minimum wordt bereikt op het snijpunt van $q_A = 10\,000$ en $q_A = -5q_Z + 20\,000$. Dit snijpunt is in $q_A = 10\,000$ en $q_Z = 2000$. De minimale totale kost is dan $TK_{\min} = TK(2000, 10\,000) = 9000$.

c. Stel *p* de nieuwe prijs per liter aangelengd sinaasappelsap, dan is de nieuwe totale kost gegeven door de functie

$$TK(q_Z, q_A) = 2q_Z + pq_A$$

Merk bovendien op dat het punt (1500,12 500) niet in een hoekpunt, maar op de rand ligt van de feasible set, op de rechte met vergelijking $q_A = -5q_Z + 20\,000$. Merk op dat deze rechte rico -5 heeft.

Opdat het gegeven punt een minimum voor de totale kost $TK(q_Z, q_A)$ zou zijn, moet de niveaukromme van $TK(q_Z, q_A)$ bij minimale kost, een (deel van een) rechte, samenvallen met deze grens. In het bijzonder moet dus de richtingscoëfficiënt van de niveaukromme *-5* zijn. Daar de vergelijking van de niveaukromme voor de nieuwe kostfunctie $q_A = -\frac{2}{p} q_Z + \frac{c}{p}$ is, volgt dat $-\frac{2}{p} = -5 \Leftrightarrow p = \frac{2}{5}$. De productiekost per liter aangelengd sinaasappelsap moet dus 0.4 euro zijn.