EXAMEN HOGERE WISKUNDE II – 2 juni 2021

OPEN VRAAG 1 (3,75 punten)

Een bloemist verkoopt twee soorten boeketten. Een boeket van de eerste soort bestaat uit 5 rozen, 5 tulpen en 5 anjers en wordt verkocht voor €35. Een boeket van de tweede soort bestaat uit 3 rozen, 6 tulpen en 6 anjers en wordt verkocht voor €20. De bloemist kan geen losse bloemen of anders samengestelde boeketten verkopen en heeft 50 rozen, 70 tulpen en 60 anjers ter beschikking.

(a) Wat is het maximaal aantal boeketten dat de bloemist zou kunnen verkopen?

(b) Wat is de maximale omzet die hij zou kunnen halen?

OPEN VRAAG 2 (3,75 punten)

Het volgende resultaat staat bekend als de Stelling van Cayley-Hamilton en zegt ruwweg dat als je een vierkante matrix "invult in zijn eigen karakteristieke veelterm", je de nulmatrix krijgt. In de formulering stelt I de $(n \times n)$-eenheidsmatrix voor.

Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *een vierkante matrix en stel dat* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *de coëfficiënten van zijn karakteristieke veelterm zijn; meer bepaald, stel dat* $\det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. *Dan geldt*

$$a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI = 0.$$

(a) Verifieer de stelling voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Bewijs de stelling in het speciale geval dat $n = 2$.

(c) Bewijs de stelling in het speciale geval dat A diagonaliseerbaar (maar n willekeurig) is.

OPEN VRAAG 3 (3,75 punten)

Stel dat de productie Q van een bedrijf, in functie van de hoeveelheden geïnvesteerd kapitaal K en ingezette arbeid L, gegeven wordt door de Cobb-Douglasproductiefunctie

$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : (K, L) \mapsto K^{2/3}L^{1/3}.$$

Wat is het minimale bedrag dat het bedrijf moet spenderen aan kapitaal en arbeid om een productie q te realiseren als een eenheid kapitaal k euro kost en een eenheid arbeid ℓ euro? Dit bedrag zal uiteraard afhangen van de getallen q, k en ℓ, die we strikt positief veronderstellen.

Opmerking: Om deze vraag te beantwoorden, zal je het minimum van een functie moeten zoeken onder een randvoorwaarde. Als je maar één kandidaat-minimum vindt, mag je ervan uitgaan dat dit inderdaad een minimum is, zonder dat verder te controleren.

OPEN VRAAG 4 **(3,75 punten)**

Een chemische stof X wordt omgezet naar een stof Y, die op haar beurt wordt omgezet naar een stof Z. Schematisch stellen we deze kettingreactie als volgt voor:

$$X \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} Z.$$

De *reactieconstanten* k_1 en k_2 zijn onderling verschillende strikt positieve reële getallen die te maken hebben met de reactiesnelheden. Meer concreet: als $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ respectievelijk de concentraties van de stoffen X, Y en Z (uitgedrukt in mol per liter) in functie van de tijd voorstellen, dan voldoen deze aan de differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = -k_1 x(t), \qquad y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t), \qquad z'(t) = k_2 y(t).$$

Stel dat er aan het begin van een reactie 20 mol per liter van stof X aanwezig is in het reactievat, maar nog geen stoffen Y en Z.

(a) Vind functievoorschriften voor $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$.

(b) Op een bepaald moment tijdens de reactie zal de concentratie van de stof Y maximaal zijn. Bereken deze maximale concentratie in de veronderstelling dat $k_1 = 2k_2$.

MEERKEUZEVRAGEN (5 punten)

Vraag 1

Welke van de volgende verzamelingen is een deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

(A) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A$ is stochastisch$\}$

(B) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A$ heeft eigenwaarde $0\}$

(C) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A$ is symmetrisch en positief semidefiniet$\}$

(D) geen van de bovenstaande

Vraag 2

Welke uitspraak over de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \cos x \cos y + z^2 - 4z + 9$ is waar?

(A) f heeft geen lokale minima.

(B) f heeft geen lokale maxima.

(C) f heeft geen zadelpunten.

(D) f heeft lokale minima, lokale maxima en zadelpunten.

Opmerking: Met de term "zadelpunt" bedoelen we een kritiek punt dat noch een lokaal minimum, noch een lokaal maximum is.

Vraag 3

De rij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan $y_0 = y_1 = 0$ en aan de differentievergelijking

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; y_{n+2} + 2y_n = 2n + 2.$$

Wat is y_{2021}?

(A) 0

(B) $\frac{4}{9}(2021 - 2^{1011})$

(C) $\frac{4}{9}(3032 - 2^{1011})$

(D) $\frac{4}{9}(4043 - 2^{1011})$

Vraag 4

Welke van de volgende oneigenlijke integralen convergeert?

(A) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sin x}\,dx$

(B) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

(C) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$

(D) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$