

EXAMEN HOGERE WISKUNDE II – 2 juni 2021

OPEN VRAAG 1 (3,75 punten)

Een bloemist verkoopt twee soorten boeketten. Een boeket van de eerste soort bestaat uit 5 rozen, 5 tulpen en 5 anjers en wordt verkocht voor €35. Een boeket van de tweede soort bestaat uit 3 rozen, 6 tulpen en 6 anjers en wordt verkocht voor €20. De bloemist kan geen losse bloemen of anders samengestelde boeketten verkopen en heeft 50 rozen, 70 tulpen en 60 anjers ter beschikking.

- (a) Wat is het maximaal aantal boeketten dat de bloemist zou kunnen verkopen?
- (b) Wat is de maximale omzet die hij zou kunnen halen?

OPEN VRAAG 2 (3,75 punten)

Het volgende resultaat staat bekend als de Stelling van Cayley-Hamilton en zegt ruwweg dat als je een vierkante matrix “invult in zijn eigen karakteristieke veelterm”, je de nulmatrix krijgt. In de formulering stelt I de $(n \times n)$ -eenheidsmatrix voor.

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix en stel dat $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ de coëfficiënten van zijn karakteristieke veelterm zijn; meer bepaald, stel dat $\det(A - \lambda I) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$. Dan geldt

$$a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0.$$

- (a) Verifieer de stelling voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- (b) Bewijs de stelling in het speciale geval dat $n = 2$.
- (c) Bewijs de stelling in het speciale geval dat A diagonaliseerbaar (maar n willekeurig) is.

OPEN VRAAG 3 (3,75 punten)

Stel dat de productie Q van een bedrijf, in functie van de hoeveelheden geïnvesteerd kapitaal K en ingezette arbeid L , gegeven wordt door de Cobb-Douglasproductiefunctie

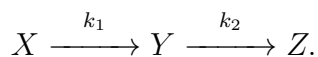
$$Q : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : (K, L) \mapsto K^{2/3} L^{1/3}.$$

Wat is het minimale bedrag dat het bedrijf moet spenderen aan kapitaal en arbeid om een productie q te realiseren als een eenheid kapitaal k euro kost en een eenheid arbeid ℓ euro? Dit bedrag zal uiteraard afhangen van de getallen q , k en ℓ , die we strikt positief veronderstellen.

Opmerking: Om deze vraag te beantwoorden, zal je het minimum van een functie moeten zoeken onder een randvoorwaarde. Als je maar één kandidaat-minimum vindt, mag je ervan uitgaan dat dit inderdaad een minimum is, zonder dat verder te controleren.

OPEN VRAAG 4 (3,75 punten)

Een chemische stof X wordt omgezet naar een stof Y , die op haar beurt wordt omgezet naar een stof Z . Schematisch stellen we deze kettingreactie als volgt voor:



De *reactieconstanten* k_1 en k_2 zijn onderling verschillende strikt positieve reële getallen die te maken hebben met de reactiesnelheden. Meer concreet: als $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ respectievelijk de concentraties van de stoffen X , Y en Z (uitgedrukt in mol per liter) in functie van de tijd voorstellen, dan voldoen deze aan de differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = -k_1x(t), \quad y'(t) = k_1x(t) - k_2y(t), \quad z'(t) = k_2y(t).$$

Stel dat er aan het begin van een reactie 20 mol per liter van stof X aanwezig is in het reactievat, maar nog geen stoffen Y en Z .

- (a) Vind functievoorschriften voor $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$.
- (b) Op een bepaald moment tijdens de reactie zal de concentratie van de stof Y maximaal zijn. Bereken deze maximale concentratie in de veronderstelling dat $k_1 = 2k_2$.

MEERKEUZEVRAGEN (5 punten)

Vraag 1

Welke van de volgende verzamelingen is een deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ is stochastisch}\}$
- (B) $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ heeft eigenwaarde } 0\}$
- (C) $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ is symmetrisch en positief semidefiniet}\}$
- (D) geen van de bovenstaande

Vraag 2

Welke uitspraak over de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \cos x \cos y + z^2 - 4z + 9$ is waar?

- (A) f heeft geen lokale minima.
- (B) f heeft geen lokale maxima.
- (C) f heeft geen zadelpunten.
- (D) f heeft lokale minima, lokale maxima en zadelpunten.

Opmerking: Met de term “zadelpunt” bedoelen we een kritiek punt dat noch een lokaal minimum, noch een lokaal maximum is.

Vraag 3

De rij $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voldoet aan $y_0 = y_1 = 0$ en aan de differentievergelijking

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{n+2} + 2y_n = 2n + 2.$$

Wat is y_{2021} ?

- (A) 0
- (B) $\frac{4}{9}(2021 - 2^{1011})$
- (C) $\frac{4}{9}(3032 - 2^{1011})$
- (D) $\frac{4}{9}(4043 - 2^{1011})$

Vraag 4

Welke van de volgende oneigenlijke integralen convergeert?

(A) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sin x} dx$

(B) $\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} dx$

(C) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$

(D) $\int_0^1 \ln x dx$