

Oefeningen module 1

oef. 1

a) fout, $B \cup C = \{1, 2, 3, 7\}$
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$

b) Juist

c) Juist, $X \cdot Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
 $\Rightarrow \# X \cdot Y = 6$

d) fout, $\mathbb{R} \setminus]2, 5] =]-\infty, 2] \cup]5, +\infty[$

oef. 2

morgen mooi weer $\Rightarrow$ we gaan wandelen
ontkenning:

Het is morgen mooi weer en toch gaan we niet wandelen

oef. 3

Equivalent: b, e, f

Niet-equivalent: a, c, d, g

Nodige Voorwaarde: werkloosheid neemt af

Voldoende Voorwaarde: de inflatie neemt toe

oef. 4

$\forall k \in K, \exists v \in V: k$ is het kind van v

$\exists v \in V, \forall k \in K: k$ is het kind van v

er bestaat een vrouw die de moeder is van alle kinderen

oef. 5

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists d \in \mathbb{D}: d$ part op n

b) $\exists d \in \mathbb{D}, \forall n \in \mathbb{N}: d$ part op n

c) goed studeren $\Rightarrow$ slagen

d) $\forall e \in E, \exists \lambda \in S: \lambda$ slaapt voor e

e) $\exists e \in E, \forall \lambda \in S: \lambda$ slaapt voor e

f) $\exists \lambda \in S, \forall e \in E: \lambda$ slaapt voor e

oef. 6.

- a) $\exists p \in P, \forall d \in D: d \text{ past niet op } p$
- b) $\forall d \in D, \exists p \in P: d \text{ past niet op } p$
- c) studeert goed $\Rightarrow$ je slaagt niet
- d) $\exists e \in E, \forall \lambda \in S: \lambda \text{ slaagt niet op } e$
- e) $\forall e \in E, \exists \lambda \in S: \lambda \text{ slaagt niet op } e$
- f) $\forall \lambda \in S, \exists e \in E: \lambda \text{ slaagt niet op } e$

- a) Er bestaat een potje waar geen enkel deksel op past
- b) Voor elk deksel bestaat er een potje waarop het niet past
- c) Iemand studeert goed en toch slaagt die niet
- d) Er is minstens 1 examen waarvoor alle studenten niet slagen
- e) Voor alle examens is er een student die niet slaagt
- f) Voor alle studenten bestaat er een examen waar ze niet voor slagen

oef. 7.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: (x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$$

- a) Voor alle x element van de reële getallen en voor alle y element van de reële getallen geldt dat als x kwadraat gelijk is aan y kwadraat, dan is x gelijk aan y .

OF: Als het kwadraat van 2 reële getallen gelijk is, zijn ook die 2 getallen gelijk

$$b) \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: (x^2 = y^2) \Rightarrow (x \neq y)$$

Er bestaat een x element van de reële getallen en er bestaat een y element van de reële getallen waarvoor geldt dat als x kwadraat gelijk is aan y kwadraat dan is x niet gelijk aan y

OF: Er bestaan reële getallen die verschillend zijn, maar waarvan het kwadraat gelijk is

c) De Ontkenning is juist

$$\text{Vb: } (-6)^2 = 6^2 = 36 \text{ maar } -6 \neq 6$$

Module 2

$$\text{oef. 1} \quad (a+b)(a-b)(a^2+b^2) = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$$

$$\text{oef. 2} \quad \sqrt{a^2} = (-a)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = (-a)^1 = -a$$

$$\begin{aligned} \text{oef. 3} \quad & \sqrt[4]{\frac{a^{-7}(a^2 b^3 c^4)^2}{(abc^{10})^3 (b^3 c^{13})^{-2}}} = \sqrt[4]{\frac{a^{-7} \cdot a^4 \cdot b^6 \cdot c^8}{a^3 \cdot b^3 \cdot c^{30} b^{-6} c^{-26}}} \\ & = \sqrt[4]{\frac{a^{-3} \cdot b^6 \cdot c^8}{a^3 b^{-3} c^{-8}}} = \sqrt[4]{\frac{b^9 \cdot c^{16}}{a^6}} = \sqrt[4]{\frac{b^8 \cdot b \cdot c^{16}}{a^4 \cdot a^2}} \\ & = \frac{b^2 \cdot c^{16}}{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a^2}} = \frac{b^2 \cdot \sqrt[4]{b} \cdot c^{16}}{a \sqrt[4]{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oef. 4} \quad & \frac{x+1}{x} = x+1 \Leftrightarrow x+1 = (x+1)x \Leftrightarrow x+1 = x^2+x \Leftrightarrow x^2+x-x-1 \\ & x^2-1 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow x=1 \vee x=-1 \\ & x \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oef. 5} \quad & \frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1} \\ & x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} < 0 \\ & \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x-1)} < 0 \\ & \frac{-4x}{(x+1)(x-1)} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & + & - & + \end{array}$$

$$\text{oef. 6} \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

a) A is een eindige verzameling.

b) A is een begrensde verzameling.

uitspraak a impliceert uitspraak b: omdat A eindig is, is A ook begrensd.

maar uitspraak b impliceert uitspraak a niet: Het is niet omdat A begrensd is dat A ook eindig is

Bv: $[x, +\infty[$ is begrensd, maar niet eindig

def. 7

a)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$\forall b, c, d \in \mathbb{R}; c \leq d \Rightarrow b + c \leq b + d$$

$$\Rightarrow \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}; (a \leq b \wedge c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$$

b) Nein, stel $a = 1, b = 3, c = -2$ und $d = 2$

$$\text{dann ist } a - c \leq b - d \Rightarrow 1 - (-2) \not\leq 3 - 2$$

$$3 \not\leq 1$$

def. 8

$$a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

$$a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$$

a) $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d$

$$a = -1, b = 2, c = -2 \text{ und } d = -1 \Rightarrow a \cdot c = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$b \cdot d = 2 \cdot (-1) = -2$$

b) $a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

$$a = -2, b = -1, c = 1 \text{ und } d = 3 \Rightarrow a \cdot c = -2 \cdot 1 = -2$$

$$b \cdot d = -1 \cdot 3 = -3$$

c) $a \leq b \wedge a \neq 0 \neq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$$a = -1 \text{ und } b = 1 \Rightarrow \frac{1}{-1} \not\geq \frac{1}{1}$$

d) $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

$$a = -4 \text{ und } b = -3 \Rightarrow a^2 = 16 \text{ und } b^2 = 9$$

Angepasste eig.:

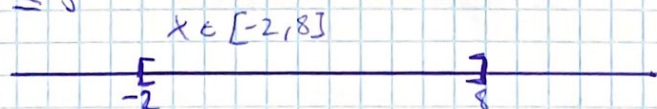
a) $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d$

b) $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d$

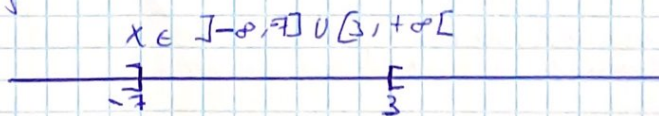
c) $0 \leq a \leq b \wedge a \neq 0 \neq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

d) $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$ oder $|a| \leq |b| \Rightarrow a^2 \leq b^2$

def. 9 a) $|x - 3| \leq 5$



b) $|x + 2| \geq 5$



$$c) |9 - x^2| > 9$$

$$x \in]-\infty, -\sqrt{18}[\cup]\sqrt{18}, +\infty[$$



$$\text{def. 10 a) } \forall \alpha \in \mathbb{R} : -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$$

$$\text{Stel } \alpha = 0 \text{ dan } 0 \leq 0 \leq 0$$

$$\text{Stel } \alpha > 0 \text{ dan } |\alpha| = \alpha \Rightarrow -\alpha \leq \alpha \leq \alpha$$

$$\text{Stel } \alpha < 0 \text{ dan } -|\alpha| = -\alpha \Rightarrow -\alpha \leq -\alpha \leq \alpha$$

$$b) \text{ als } \alpha \in \mathbb{R} \text{ en } z \in \mathbb{R}^+ \text{ voldoen aan } -z \leq \alpha \leq z \text{ dan is k.l.s.}$$

$$\text{Als } \alpha \leq z \text{ dan is } -\alpha \geq -z \Rightarrow |\alpha| \leq z$$

$$c) \forall \alpha, b \in \mathbb{R} \text{ is } \max\{\alpha, b\} = \frac{1}{2}(\alpha + b + |\alpha - b|)$$

$$\text{Stel } \alpha = \max \text{ dan } |\alpha - b| = \alpha - b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \cancel{b} + \alpha - \cancel{b}) = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\text{Stel } b = \max \text{ dan is } |\alpha - b| = -(\alpha - b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\cancel{\alpha} + b - \cancel{\alpha} + b) = \frac{2b}{2} = b$$

$$\text{Stel } \alpha = b \text{ dan is } |\alpha - b| = 0 = \alpha - \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \underset{\alpha}{b} + 0) = \frac{2\alpha}{2} = \alpha = b$$

$$\text{def. 11 a) waar}$$

$$b) \text{ waar}$$

$$c) \text{ vals, stel } \alpha = -3 \text{ en } b = 5 \text{ dan is } |\alpha - b| = |-3 - 5| = 8$$

$$|\alpha| - |b| = 3 - 5 = -2$$

$$\text{def. 12 } |x+5| \leq 2 \text{ en } |y+5| \leq 6 \text{ max } |x-y|?$$

$$x \in [-7, -3] \text{ en } y \in [-11, 1]$$

$$|x-y| \text{ kan maximaal 8 w.}$$

$$x = -7, y = 1 \Rightarrow |-7 - 1| = |-8| = 8$$

$$\text{oef. 13} \quad |x+1| \leq 2, |y+1| \leq 3, |y-z| \leq 1 \text{ en } |x-z| \geq 7$$

$$x \in [-3, 1], y \in [-4, 2], z \in [-5, 1]$$

$\Rightarrow$ Neen, want x kan niet lager dan -3 of hoger dan 1
en z kan niet lager dan -5 of hoger dan 1

$\Rightarrow$ als $x = 1$ dan moet $z = -6$ of lager
als $x = -3$ dan moet $z = 4$ of hoger

oef. 14 $[2, +\infty[$ is een gesloten interval omdat $\mathbb{R} \setminus [2, +\infty[$ open is

$$\text{oef. 15} \quad a) \quad \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 + x^4 + \frac{\sqrt{5}}{2}x^5 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^6 + \frac{\sqrt{7}}{2}x^7 + \sqrt{2}x^8 + \frac{3}{2}x^9$$

$$= \sum_{i=1}^9 \frac{\sqrt{i}}{2} x^i$$

$$b) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3n+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{3i+1}$$

oef. 16

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \neq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

oef. 17

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

oef. 18 a) $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

IB: We tonen aan dat de stelling geldt voor de kleinste mogelijke waarde van $n \in \mathbb{N}_0$ namelijk $n=1$:

Linkerlid: 1

Rechterlid: $\frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Hiermee is de IB bewezen

IH: We veronderstellen dat de stelling geldt voor een $m \in \mathbb{N}_0$ ^{wilsk.}

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{1}{2} m(m+1)$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor $m+1$:

T.B: $\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{1}{2} (m+1)(m+1+1) = \frac{1}{2} (m+1)(m+2) = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$

B.: $\sum_{i=1}^{m+1} i = \sum_{i=1}^m i + m+1 \stackrel{IH}{=} \frac{1}{2} m(m+1) + m+1$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + m) + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{m^2 + m + 2m + 2}{2}$$

$$= \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg elke $m \in \mathbb{N}_0$.

$$b) 2^n \geq 1+n$$

TA:

We nemen aan dat de stelling geldt voor de kleinste mogelijke waarde van n nl: $n=1$:

Linkerlid: $2^1 = 2$

$$\Rightarrow 2 \geq 2$$

Rechterlid: $1+1 = 2$

Hiermee is de IB bewezen.

IH: We nemen aan dat de stelling geldt voor een willek. $m \in \mathbb{N}_0$:

$$2^m \geq 1+m$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor $m+1$:

T.B.: $2^{m+1} \geq 1+m+1$

B.: $2^{m+1} = 2^m \cdot 2^1 = 2^m \cdot 2 \stackrel{IH}{\geq} 2 \cdot 2^m \geq (1+m) \cdot 2$

$$(1+m) \cdot 2 \leq 2 + 2m = m + (m+2) \geq m+2 \quad ||$$

$$2 \cdot 2^m \geq (1+m) \cdot 2 \geq m+2$$

$$2 \cdot 2^m \geq m+2$$

$$2^{m+1} \geq m+2$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

IB: We bewijzen dat de stelling geldt voor de kleinste waarde van $n \in \mathbb{N}_0$, nl: $n=1$.

$$L.L: \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$R.L: \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Beide leden zijn gelijk voor $n=1$. Hiermee is de IB bewezen.

I.H: We nemen aan dat de stelling geldt voor een willek. $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor $m+1$:

$$T.B: \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{(m+1)+1} = \frac{m+1}{m+2}$$

$$B.: \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+1+1)}$$

$$\stackrel{I.H}{=} \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m(m+2) + 1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2 + 2m + 1}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg ook voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

$$d) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

IB: We nemen aan dat de stelling geldt voor de kleinste waarde van n nl. $n=1$:

$$L: \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$$

$$R: \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Beide leden zijn gelijk en hiermee is de IB dus bewezen

IH: We nemen aan dat de stelling geldt voor een willekeurige $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor $m+1$:

$$\begin{aligned} T.B.: \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \\ &= \frac{(m^2+3m+2)(2m+3)}{6} = \frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B.: \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 \stackrel{IH}{=} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(2m^2+3m+1)}{6} + \frac{6(m^2+2m+1)}{6} \\ &= \frac{2m^3+3m^2+m+6m^2+12m+6}{6} \\ &= \frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6} \end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg voor elke $m \in \mathbb{N}_0$.

c) Als $z \in \mathbb{R}$ en $z \neq 1$, dan is $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

IB: We gaan nu dat de stelling geldt voor de kleinste waarden van n in $\mathbb{N}$, d.w.z. $n = 1$ en $z \neq 1$

LL: $1 + z^1 = 1 + z^1 = 3$

RL: $\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{1+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^2 - 1}{1} = 4 - 1 = 3$

Beide leden zijn gelijk. Hiermee is de IB bewezen.

IH: We nemen aan dat de stelling ook geldt voor een $m \in \mathbb{N}_0$:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^m = \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1}$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling geldt voor een $m+1$:

T.B.: $1 + z + z^2 + \dots + z^m + z^{m+1} = \frac{z^{m+1+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{m+2} - 1}{z - 1}$

B.: $\frac{1 + z + z^2 + \dots + z^m + z^{m+1}}{\text{IH}} = \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1} + z^{m+1}$

$$= \frac{z^{m+1} - 1 + z^{m+1}(z - 1)}{z - 1} = \frac{z^{m+1} - 1 + z^{m+1+1} - z^{m+1}}{z - 1}$$

$$= \frac{z^{m+2} - 1}{z - 1}$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg voor alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f) 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

IB: We gaan na dat de stelling geldt voor de kleinste waarde van n nl. $n=1$

$$LL = 1(1!) = 1 \quad RL = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

Beide leden zijn gelijk. Hiermee is de IB bewezen

IH: We nemen aan dat de stelling geldt voor een $m \in \mathbb{N}_0$:

$$1(1!) + 2(2!) + \dots + m(m!) = (m+1)! - 1$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor $m+1$:

$$T.B.: 1(1!) + 2(2!) + \dots + m(m!) + (m+1)(m+1)! = (m+2)! - 1$$

$$B.: 1(1!) + 2(2!) + \dots + m(m!) + (m+1)(m+1)!$$

$$\stackrel{IH}{=} (m+1)! - 1 + (m+1)(m+1)!$$

$$= (m+1)! + (m+1)(m+1)! - 1 = (m+1+1)(m+1)! - 1$$

$$= (m+2)(m+1)! - 1 = (m+2)! - 1$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en Bijgevolg voor elke $n \in \mathbb{N}_0$

oef. 19 a)

$$\frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{4 \cdot n^2 - 1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{4 \cdot i^2 - 1}$$

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

IB: We tonen aan dat deze stelling geldt voor de kleinste waarde van n nl. $n=1$

$$LL = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$RL = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Beide leden zijn gelijk. Hiermee is de IB bewezen.

IH: We nemen aan dat de stelling geldt voor een $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \frac{m}{2m+1}$$

IS: We bewijzen nu dat de stelling ook geldt voor een $m+1$:

T.B.: $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \frac{m+1}{2(m+1)+1} = \frac{m+1}{2m+3}$

B: $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot (m+1)^2 - 1}$

$\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{4 \cdot (m+1)^2 - 1} = \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{4 \cdot (m^2 + 2m + 1) - 1}$

$= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{4m^2 + 8m + 3} = \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}$

$= \frac{m(2m+3)+1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{2m^2 + 3m + 1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{(2m+1)(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$

$= \frac{m+1}{2m+3}$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m+1$ en bijgevolg voor elke $m \in \mathbb{N}_0$

oef. 20 $x = (2, -5) \in \mathbb{R}^2$

a) $\|x\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

b) $\langle x, x-2y \rangle$ met $y = (4, 3)$

$x-2y = (2 - 2 \cdot 4, -5 - 2 \cdot 3) = (-6, -11)$

$\langle x, x-2y \rangle = 2 \cdot (-6) + (-5) \cdot (-11) = -12 + 55 = 43$

oef. 21 $x = (1, 1)$ en $y = (3, 4)$ in $\mathbb{R}^2$

a) $\|x - y\| = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

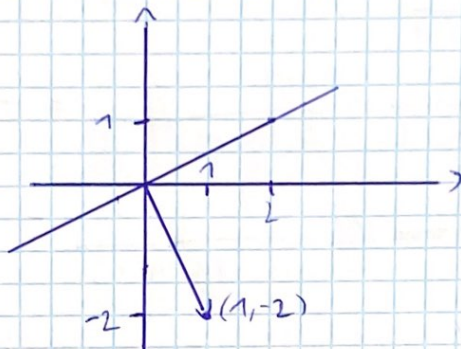
b) $z = (5, 7)$

$$\begin{cases} 1x + 3y = 5 \\ 1x + 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ 5 - 3y + 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 6 = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow z$ is een lineaire combinatie

oef. 22 $(1, -2)$

$x - 2y = 0 \Rightarrow$ elke $\lambda(2, 1)$ met $\lambda \in \mathbb{R}$



oef. 23 $x, y \in \mathbb{R}^3 \perp (1, 0, 0)$

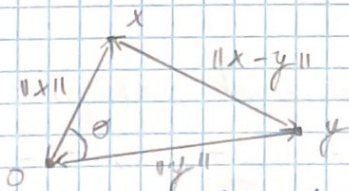
$x = (0, 1, 0)$ en $y = (0, 0, 1)$

Er bestaat geen z meer die $\perp$ staat op de andere

oef. 24 Zij $x, y \in \mathbb{R}^2$. Veronderstel dat $x \perp y$. Toon aan dan aan dat:

$$\|x - y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

zie bewijs Cauchy - Schwarz p. 39



De cosinusregel uit driehoeksmethode levert ons dat:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{en } \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Aangezien x en y loodrecht zijn is $\langle x, y \rangle = 0$

dus: $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Module 3

oef. 1 functies: 2 en 3
geen functies: 1 en 4

oef. 3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is even als $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is oneven als $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ is even als de grafiek symmetrisch is tov de y-as
 f is oneven als de grafiek symmetrisch is tov de oorsprong

oef. 4 De rechte is inverseerbaar

oef. 5 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow x^3$

Injectief:

T.B.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

B: Neem x_1, x_2 willekeurig zodat $f(x_1) = f(x_2)$:

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$\sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \text{Het is injectief}$$

Surjectief:

T.B.: $\forall y_1 \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = y$

B: Neem $y \in \mathbb{R}$ willekeurig en stel $x = \sqrt[3]{y}$.

$$\text{Dan is } f(x) = y$$

$$x^3 = y$$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \text{De functie is surjectief}$$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow |x|$

Injectief: De functie is niet injectief, stel $x_1 = 3$ en $x_2 = -3$
dan is $f(x_1) = 3 = f(x_2)$

Surjectief: De functie is niet surjectief, stel $y = -1 \Rightarrow$ dit heeft geen x-waarde

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto x^2$

Niet injectief, want als $x_1 = 3$ en $x_2 = -3$ dan is $f(x_1) = 9 = f(x_2)$

Surjectief:

T.B.: $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

B: Neem $y \in \mathbb{R}^+$ willekeurig zodat $x = \sqrt{y}$:

$$f(x) = y$$

$$x^2 = y$$

$x = \sqrt{y} \Rightarrow$ de functie is surjectief

d) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$

Injectief:

T.B.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

B: i. Neem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ willek. zodat $f(x_1) = f(x_2)$:

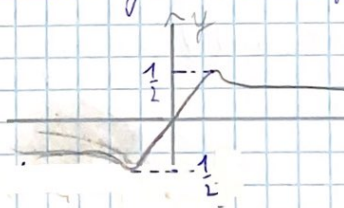
$$x_1^2 = x_2^2$$

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ de functie is injectief

De functie is niet surjectief want voor $y = -1$ is er geen x -waarde

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$



De functie is niet injectief.

Stel $y = \frac{1}{5}$ dan is $\frac{1}{5} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = 5x$

$$x^2+1-5x=0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 21$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \vee x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$

De functie is niet surjectief want het beeld is $\{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$

$$f) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

De functie is niet injectief, stel $(x_1, y_1) = (-5, 5)$ en $(x_2, y_2) = (5, -5)$
 Dan is $x_1^2 + y_1^2 = 50 = x_2^2 + y_2^2$

Surjectief:
 T.B.: $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = z$

B.: Neem een $z \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Stel $z \geq 0$, kies $y = 0$ en x zodat $x^2 = z$

Dus: $x = \sqrt{z}$ en $y = 0$ dus $(\sqrt{z}, 0)$

Dan is $f(\sqrt{z}, 0) = (\sqrt{z})^2 + 0^2 = z$

Stel $z < 0$, kies $y^2 = -z$ en $x = 0$

Dus $y = \sqrt{-z}$ en $x = 0 \Rightarrow (0, \sqrt{-z})$

Dan is $f(0, \sqrt{-z}) = 0^2 + (\sqrt{-z})^2 = -z$

$\Rightarrow$ De functie is niet surjectief

$$g) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$$

De functie is niet injectief, stel $(x_1, y_1) = (-5, 5)$ en $(x_2, y_2) = (5, -5)$
 Dan is $x_1^2 + y_1^2 = 50 = x_2^2 + y_2^2$

Surjectief:
 T.B.: $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = z$

B.: Neem een $z \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Stel $z \geq 0$, kies $y = 0$ en x zodat $x^2 = z$

Dus $x = \sqrt{z}$ en $y = 0 \Rightarrow (\sqrt{z}, 0)$

Dan is $f(\sqrt{z}, 0) = (\sqrt{z})^2 - 0^2 = z$

Stel $z < 0$, kies $y^2 = -z$ en $x = 0$

Dus $x = 0$ en $y = \sqrt{-z} \Rightarrow (0, \sqrt{-z})$

Dan is $f(0, \sqrt{-z}) = 0^2 - (\sqrt{-z})^2 = -(-z) = z$

$\Rightarrow$ De functie is surjectief

oef. 6 a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x^3 + 5$

Ja, de functie is injectief. $2x^3 + 5 = y \Leftrightarrow 2x^3 = y - 5$

De inverse is $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$

$$\stackrel{\text{ij}}{x^3 = \frac{y-5}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y-5}{2}}$$

b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : 12x - 11$

Ja, de functie is injectief. $12x - 11 = y \Leftrightarrow y + 11 = 12x$

De inverse is $f^{-1}(x) = \frac{x+11}{12}$

$$\stackrel{\text{ij}}{x = \frac{y+11}{12}}$$

c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x^2 - 4x + 1$

De functie is niet injectief

oef. 7

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ en $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x+1$

$g \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow (x+1)^2$

$h \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2 + 1$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow y$ en $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : z \rightarrow z+1$

$g \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : z \rightarrow y+1$

$h \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow z+1$

c) $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : e \rightarrow \sqrt{e}$ en $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow u^2 - 4$

$g \circ h:]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow \sqrt{u^2 - 4}$

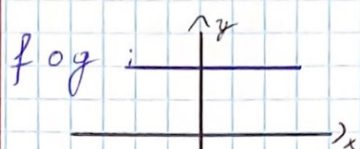
$h \circ g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : e \rightarrow (\sqrt{e})^2 - 4 = e - 4$

d) $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x-1}$ en $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2 - 3$

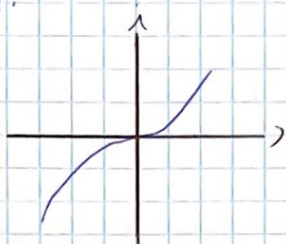
$g \circ h: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 4}$

$h \circ g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 3$

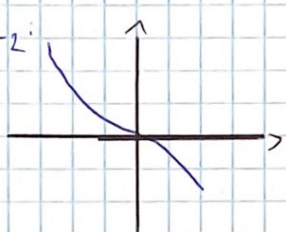
oef. 8



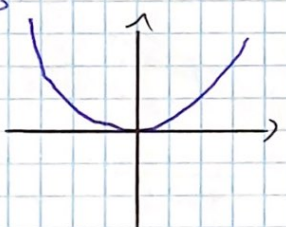
$f \circ h_1$:



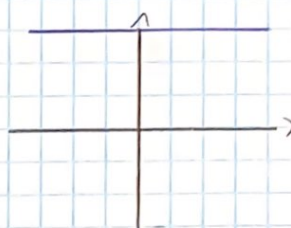
$f \circ h_2$:



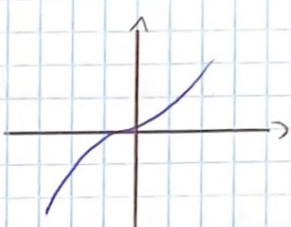
$f \circ h_3$:



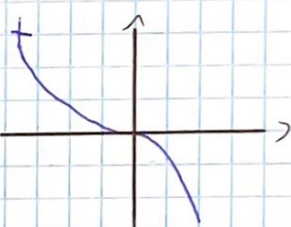
$g \circ f$:



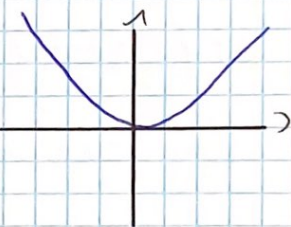
$h_1 \circ f$:



$h_2 \circ f$:



$h_3 \circ f$:



oef. 9

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(x+5) \cdot 2 - 6}{2} - 2$$

$$f(x) = \frac{2x+10-6}{2} - 2 = \frac{2x+4}{2} - 2 = x$$

oef. 10

$$C(n) = 0,5n + 1$$

$$n(t) = 10 + 0,1t^2$$

$$a) C(t) = 0,5(10 + 0,1t^2) + 1 = 6 + 0,05t^2$$

$$b) C(t) = 6 + 0,05t^2 = 6,8$$

$$0,05 \cdot t^2 = 0,8$$

$$t^2 = \frac{0,8}{0,05} \Rightarrow t = \sqrt{16} \Rightarrow t = 4 \vee t = -4$$

Na 4 jaar zal het CO-microon 6,8 dollars per miljoen
cellen

def. 11 $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \rightarrow z(t)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \rightarrow \pi \cdot (z(t))^2$

def. 12 $n: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}; t \rightarrow n(t) = 5t + 3$

a) ja, $n(t) = 5t + 3 \Leftrightarrow \frac{n(t) - 3}{5} = t$

$\Leftrightarrow t(n) = \frac{n - 3}{5}$

b) nein, weil die Funktion $n(t) = 8t - t^2$ nicht injektiv

def. 13

a) $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow 3x^2y - 2xy + x^2 - 6y$

$z(1, -1) = 3 \cdot (1)^2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1^2 - 6 \cdot (-1)$
 $= -3 + 2 + 1 + 6 = 6$

b) $Q: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; (k, l) \rightarrow \frac{1}{2} k^{3/4} \cdot l^{1/4}$

$Q(16, 1) = \frac{1}{2} \cdot (16)^{3/4} \cdot (1)^{1/4} = 4$

c) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(-5, -10)\} \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow \frac{4x}{5+x} + 4x^2y + \frac{2y}{10+y}$

$f(3, -2) = \frac{4 \cdot 3}{5+3} + 4 \cdot 3^2 \cdot (-2) + \frac{2 \cdot (-2)}{10-2} = \frac{12}{8} - 72 - \frac{4}{8}$
 $= 1 - 72 = -71$

def. 14 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow x^2y - 3xy$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; t \rightarrow (t, t^4)$

$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \rightarrow t^2 \cdot t^4 - 3t \cdot t^4 = t^6 - 3t^5$

$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow (x^2y - 3xy, (x^2y - 3xy)^2)$

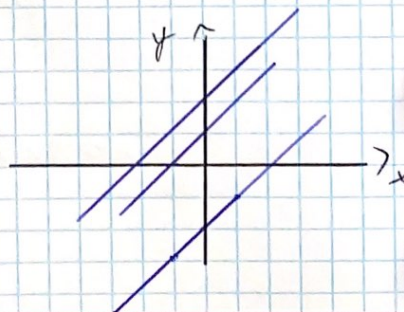
def. 15 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow 5$

def. 16 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow |x - y|$

$N_1 \Rightarrow 1 = |x - y| \Rightarrow y = x - 1$

$N_2 \Rightarrow 2 = |x - y| \Rightarrow y = x - 2$

$N_{-2} \Rightarrow -2 = |x - y| \Rightarrow x = y + 2$



oef. 17

Een niveaulijn verbindt alle punten met dezelfde functiewaarde.
2 verschillende niveaulijnen komen dus bij verschillende functiewaarden.

Omdat een punt slechts 1 functiewaarde kan hebben, kan het dus niet tot 2 verschillende niveaulijnen behoren.

oef. 18

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x + 2y + 1$$

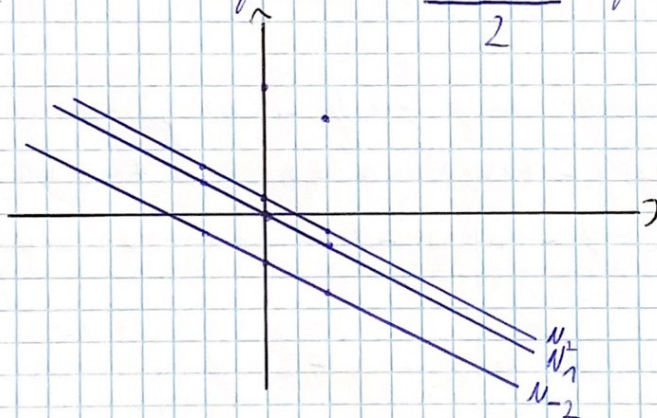
$$N_2: -2 = x + 2y + 1 \Rightarrow \frac{-x-3}{2} = y \Rightarrow -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = y$$

$$N_{-1}: -1 = x + 2y + 1 \Rightarrow \frac{-x-2}{2} = y \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 1 = y$$

$$N_0: 0 = x + 2y + 1 \Rightarrow \frac{-x-1}{2} = y \Rightarrow -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = y$$

$$N_1: 1 = x + 2y + 1 \Rightarrow \frac{-x}{2} = y \Rightarrow -\frac{1}{2}x = y$$

$$N_2: 2 = x + 2y + 1 \Rightarrow \frac{10-x}{2} = y \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = y$$

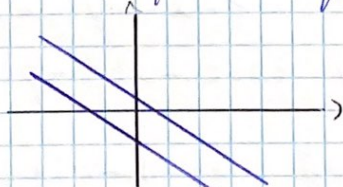


oef. 19

$$a) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow ax + by + c$$

$$N_1: 1 = ax + by + c \Rightarrow y = \frac{1-c-ax}{b}$$

$$N_0: 0 = ax + by + c \Rightarrow y = \frac{-c-ax}{b}$$



Doordat de niveaulijnen steeds evenwijdige rechten zijn

$$b) \quad ax + by + c = d \quad (\Rightarrow) \quad y = \frac{-ax - c + d}{b}$$

a geeft de verandering van de z -coördinaat als x met 1 toeneemt en y constant blijft

b geeft de verandering van de z -coördinaat als y met 1 toeneemt en de x constant blijft

c geeft het snijpunt met de z -as weer

c) m geeft ^{ook} de verandering weer van de y als x met 1 toeneemt en d bepaalt ook het snijpunt met de y -as

oef. 20

a) Waar

b) Niet waar, niet voor alle, er bestaan oppervlakten die als niveaulijnen rechten hebben, maar geen vlak zijn

oef. 21

$$a) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow y - (x+2)^2 - 7$$

$$N_1: 1 = y - (x+2)^2 - 7 \Rightarrow 8 + x^2 + 4x + 4 = y \Rightarrow x^2 + 4x + 12 = y$$

$$N_2: 2 = y - (x+2)^2 - 7 \Rightarrow 9 + x^2 + 4x + 4 = y \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = y$$

$$b) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow (x+2) \cdot y$$

$$N_1: 1 = (x+2) \cdot y \Rightarrow y = \frac{1}{x+2}$$

$$N_2: 2 = (x+2) \cdot y \Rightarrow y = \frac{2}{x+2}$$

$$c) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$$

$$N_1: 1 = x^2 - y^2 \Rightarrow 1 - x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = y$$

$$N_2: 2 = x^2 - y^2 \Rightarrow 2 - x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2} = y$$

oef. 22

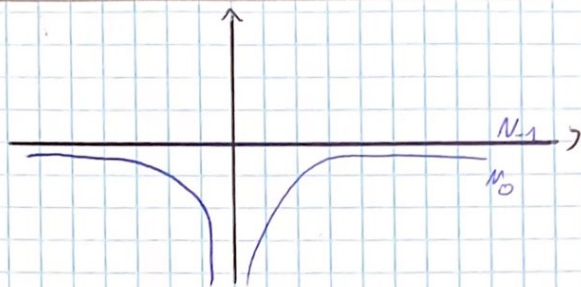
$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow |xy| - 1$$

$$N_{-2}: -2 = |xy| - 1 \Rightarrow |xy| = -1 \Rightarrow \text{gaat niet}$$

$$N_{-1}: -1 = |xy| - 1 \Rightarrow |xy| = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$N_0: 0 = |xy| - 1 \Rightarrow |xy| = 1 \Rightarrow xy = 1 \vee xy = -1$$

$$y = \frac{1}{x} \vee y = -\frac{1}{x}$$



Doordat het domein $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ is, zijn er enkel neg. y

oef. 24

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

a) $(-1, 2)$ en $r=3$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9\}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 - 9 = 0$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0\}$$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + 2x + y^2 - 4y$ met N_4

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$