Module 4

oef. 1 a) $x_n = n^2 - n + 3$

$x_0 = 0^2 - 0 + 3 = 3$

$x_1 = 1^2 - 1 + 3 = 3$

$x_2 = 2^2 - 2 + 3 = 5$

$x_3 = 3^2 - 3 + 3 = 9$

$x_4 = 4^2 - 4 + 3 = 15$

$x_5 = 5^2 - 5 + 3 = 23$

$x_n = (3, 3, 5, 9, 15, 23, \dots)$

b) $x_n = 1 + (-1)^n$

$x_0 = 1 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$

$x_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$

$x_2 = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$

$x_3 = 1 + (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

$x_4 = 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$

$x_5 = 1 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$

$x_n = (2, 0, 2, 0\ 2, 0, \dots)$

oef. 2 a) $x_0 = 5$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en $x_{n+1} = x_n + 3$

$x_n = (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots)$

b) $x_0 = 1$ en $\forall n \in \mathbb{N}: x_{n+1} = x_n (n+1)$

$x_n = (1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots)$

c) $x_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}: x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1$

$x_n = (1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots)$

d) $x_0 = x_1 = 1$ en $\forall n \in \mathbb{N}: x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

$x_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

oef.3

a) $k_n = (k, k(1+i), k(1+i)^2, k(1+i)^3, k(1+i)^4)$
met $k_0 = k$

b) $k_{n+1} = k_n(1+i)$ met $k_0 = k$

c) Meetkundige rij

d) $k_n = k(1+i)^n$

e) $S_{10} = k \cdot \frac{(1+i)^{11}-1}{i}$ of $S_{11} = k \cdot \frac{(1+i)^{11}-1}{i+1-1}$

oef.4 a) $\sum_{k=1}^{10} 3(-2)^{n-1}$

$S_{10} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = \cancel{3} \cdot \frac{1023}{-\cancel{3}} = -1023$

of als $\sum_{k=0}^{9} 3 \cdot (-2)^k \Rightarrow S_9 = 3 \cdot \frac{(-2)^{9+1}-1}{-2-1} = -1023$

b) $\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2} = \sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Rightarrow S_8 = \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+1}-1}{\left(\frac{1}{3}\right)-1} = \frac{9841}{59\,049}$

oef.5 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $y_0 = 5$ en $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $y_{n+1} = 0,7 \cdot y_n + 3$

$y_n = (5, \frac{13}{2}, 7,55, 8,285, 8,7995, \ldots)$

$y_1 = 0,7 \cdot 5 + 3$
$y_2 = 0,7 \cdot (0,7 \cdot 5 + 3) + 3 = (0,7)^2 \cdot 5 + 0,7 \cdot 3 + 3$
$y_3 = 0,7((0,7)^2 \cdot 5 + 0,7 \cdot 3 + 3) + 3 = (0,7)^3 \cdot 5 + (0,7)^2 \cdot 3 + 0,7 \cdot 3 + 3$

$y_4 = 0{,}7((0{,}7)^3 \cdot 5 + (0{,}7)^2 \cdot 3 + 0{,}7 \cdot 3 + 3) + 3$
$= (0{,}7)^4 \cdot 5 + (0{,}7)^3 \cdot 3 + (0{,}7)^2 \cdot 3 + 0{,}7 \cdot 3 + 3$

$\Rightarrow \quad y_n = (0{,}7)^n \cdot 5 + (0{,}7)^{n-1} \cdot 3 + (0{,}7)^{n-2} \cdot 3 + \ldots \; 0{,}7 \cdot 3 + 3$
$= (0{,}7)^n \cdot 5 + \sum_{k=0}^{n-1} 3 \cdot (0{,}7)^k$

$$y_{365} = \underbrace{(0{,}7)^{365}}_{=0} \cdot 5 + \sum_{k=0}^{364} 3 \cdot (0{,}7)^k = 3 \cdot \frac{(0{,}7)^{364} - 1}{0{,}7 - 1} = 10$$

oef. 6 $\quad s_n = x_n + y_n$ en $p_n = x_n \cdot y_n$

a) Waar, stel $x_n = a + v \cdot n$ en $y_n = b + d \cdot n$
Dan is $s_n = x_n + y_n = a + v \cdot n + b + d \cdot n$
$\Rightarrow$ is rekenkundig

b) Vals, stel $x_n = a \cdot r^n$ en $y_n = b \cdot t^n$
Dan is $s_n = a \cdot r^n + b \cdot t^n$
$\Rightarrow$ is niet meetkundig

c) Vals, stel $x_n = a + v \cdot n$ en $y_n = b + d \cdot n$
Dan is $p_n = (a + v \cdot n)(b + d \cdot n)$
$= ab + adn + vnb + vnd \cdot n$
$\Rightarrow$ is niet rekenkundig

d) waar, stel $x_n = a \cdot r^n$ en $y_n = b \cdot t^n$
Dan is $p_n = (a \cdot r^n)(b \cdot t^n) = ab\, r^n t^n$
$\Rightarrow$ is meetkundig

oef. 7 $\quad i = 5{,}75\,\% \qquad t_5 = 10\,000$

$(1{,}0575)^5 \cdot x = 10\,000 \Rightarrow x = \dfrac{10\,000}{(1{,}0575)^5} = 7561{,}33$

oef. 8 $i = 7\%$ $k = 100\,000$ $n = 20j.$

a) $S_{20} = 100\,000 \cdot (1{,}07)^{20} = 386\,968{,}45$

b)

$$A_0 = 100\,000 = k \cdot \frac{(1{,}07)^{20} - 1}{(1{,}07) - 1} \cdot \frac{1}{(1{,}07)^{20}} \Rightarrow k = \frac{100\,000}{10{,}5940}$$

$k = 9439{,}29$

of $AW = 100\,000 = C \cdot a_{\overline{20}|0{,}07} = C \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{1{,}07}\right)^{20}}{0{,}07}$

$$\Rightarrow C = \frac{100\,000}{10{,}5940} = 9439{,}29$$

oef. 9 $n = 20j.$ $i = 7\%$ $C = 7000$

$$B = 7000 \, \frac{(1{,}07)^{20} - 1}{1{,}07 - 1} \cdot \frac{1}{(1{,}07)^{20}}$$

$= 74\,158{,}10$

of $AW = 7000 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{1{,}07}\right)^{20}}{0{,}07} = 74\,158{,}10$

oef. 10 $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n < m$

Een rij gaat naar $-\infty$ $\Leftrightarrow$ we voor elke $m \in \mathbb{R}$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zodat $x_n < m$ voor alle n die groter zijn dan n_0

oef. 11

a) Als een rij begrensd is, dan is ze naar boven begrensd
Waar, Begrensd betekent naar boven en onder begrensd

b) Als een rij naar boven begrensd is, dan is ze begrensd
Niet waar, ze zijn enkel begrensd als ze ook nr onder begrensd zijn

c) Als een rij naar boven en naar onder is begrensd, dan is ze begrensd
Waar

d) Iedere begrensde rij is convergent (dwz heeft een eindige limiet)
Niet waar, er zijn rijen die begrensd zijn en niet convergeren
Bv: $\sin(n)$

oef. 12

a) $x_n = 5 + \frac{1}{n}$

b) $x_n = (-1)^n$

c) Een rij die convergeert is bijgevolg ook begrensd

d) $x_n = 3n$

oef. 13 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeert naar 2

Stel $y_n = x_n + \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} = 0$

$\lim_{n \to \infty} x_n = 2 \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} 2 + \frac{5}{n} = 2$

oef. 14 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar 2 en $x_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Stel $y_n = \frac{1}{2x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to \infty} x_n = 2 \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

oef. 15 $x_n < y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ is $\lim_{n \to \infty} x_n < \lim_{n \to \infty} y_n$?

Neen, want als de limiet van beide $+\infty$ is, dan zijn ze even groot

Bv: $x_n = n^2 < y_n = 2 \cdot n^2 + 1$

$\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty = \lim_{n \to \infty} 2n^2 + 1 = +\infty$

oef. 16 Aantonen zoals $0 \cdot \infty$ op p. 107

1) $x_n = n \qquad y_n = n^2$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

2) $x_n = 4n \qquad y_n = 5n$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} 4n = +\infty \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} 5n = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4\cancel{n}}{5\cancel{n}} = \frac{4}{5}$

3) $x_n = n^3 \qquad y_n = 3n$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} n^3 = +\infty \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} 3n = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\cancel{3}2}}{3\cancel{n}} = +\infty$

=> het kan van alles zijn

oef. 17

a) $\lim_{n \to \infty} (n^5 - n^4 + n^3) = \lim_{n \to \infty} n^5\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{3 \cdot n^2 - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{3n^{\cancel{2}}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n} \overset{\lim\limits_{n\to\infty}}{=} \dfrac{\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n} = 2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{1+\frac{2}{n}} = 3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+3}{2n^2+n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(4+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n^2}}{-\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n^2}}{-\frac{1^n}{5^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-5+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{5^n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(-5+\frac{1}{n^2}\right)\cdot 5^n = -\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}\cdot \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}\cdot \sin n = 0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}\cdot 3^n\cdot 3$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n}\cdot 3 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 3 = +\infty$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n\cdot 2n}{n^2+5n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cancel{n}\cdot(-1)^n}{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}$

$(-1)^n$ is afwisselend ± 1

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pm 2}{n\left(1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = 0$

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pm 1}{n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)} = 0$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{n}+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)} = 0$

oef. 18 a) de limiet van de rij $(n^2+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat niet want

$\lim_{n\to\infty} (n^2+(-1)^n) = \lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

en we weten dat de $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ niet bestaat

Fout, je mag $\lim_{n\to\infty} n^2+(-1)^n$ niet opsplitsen in $\lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} (-1)^n$. Als je dit wilt doen moeten beide een limiet hebben (zie stelling 4.2.1)

b) De limiet van de rij $\left(\frac{1}{n} \cdot \sin n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestaat niet omdat de $\lim_{n\to\infty} \sin n$ niet bestaat.

Fout, de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0$, want $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

c) De limiet van de rij $\left(\frac{(-7)^n}{(-8)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat niet omdat zowel de limiet van de teller als de limiet van de noemer niet bestaan.

Fout, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-7)^n}{(-8)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{+7}{+8}\right)^n = +\infty$

oef. 19 a) Als x_n een dalende rij is, dan zal $\lim_{n\to\infty} x_n$ bestaan

Waar

b) Als $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, dan is x_n een dalende rij

Niet Waar, $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

$\hookrightarrow -\frac{1}{n}$ is een stijgende rij

c) Als x_n een dalende rij is, dan is $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Niet waar, $\lim_{n \to \infty} -n = -\infty$ en $-n$ is een dalende rij.

Module 5

oef. 1 a) $(2,1)$ en $(3,-2)$

$$y - 1 = \frac{-2 - 1}{3 - 2}(x - 2)$$

$$y = -3x + 6 + 1 = -3x + 7$$

b) $(1,2)$ en rico $= -3$

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 5$$

c) rico $= 2$ en snijpunt met y-as is $(0,-8)$

$$y = 2x - 8$$

oef. 2 Voor een $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ is het een nodige voorwaarde dat $f(0,0) = f(0,0,0)$ opdat f lineair is

oef. 3 Bestaat er een $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die lineair is en waarvoor $f(1,2,3) = 0$, $f(4,5,6) = 1$ en $f(5,7,9) = 2$?

$$\begin{cases} 1a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 5b + 6c = 1 \\ 5a + 7b + 9c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c \\ 4(-2b - 3c) + 5b + 6c = 1 \\ 5(-2b - 3c) + 7b + 9c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c \\ -8b + 5b - 12c + 6c = 1 \\ -10b + 7b - 15c + 9c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c \\ -3b - 6c = 1 \\ -3b - 6c = 2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

gaat niet (geen opl.)

OF : Een lineaire functie moet voldoen aan : $f(x) + f(y) = f(x+y)$

$x = (1,2,3)$ en $y = (4,5,6)$ Dan is $x+y = (5,7,9)$

en $0 + 1 \neq 2$

$\Leftrightarrow$ niet lineair

oef. 4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \to 3x - 2y + 1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: x \to (2x, -3x)$

$f(0) = 1$ dus f is niet lineair

$\lambda f(x) \neq f(\lambda x) \Rightarrow \lambda(3x - 2y + 1) \neq 3\lambda x - 2\lambda y + 1$

$g(0) = (0,0)$ V

$g(x+y) = g(x) + g(y)$

$g(x) = (2x, -3x)$ en $g(y) = (2y, -3y)$

$g(x+y) = (2x, -3x) + (2y, -3y) = (2x+2y, -3x-3y)$ V

$g(x+y) = (2(x+y), -3(x+y)) = (2x+2y, -3x-3y)$

$g(\lambda x) = \lambda g(x)$:

$\lambda(2x, -3x) = (2\lambda x, -3\lambda x)$ V

$\Rightarrow g$ is Lineair

oef. 5 $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is een eerstegraadsfunctie

$g(-1,0) = 2$, $g(0,3) = -5$ en $g(1,1) = 3$

$g(x,y) = ax + by + c$

$$\begin{cases} -a + 0b + c = 2 \\ a.0 + 3.b + c = -5 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right) \to \begin{cases} -a + 0b + c = 2 \\ 0a + b + 2c = 5 \\ 0a + 0b - 5c = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

Dus $g(x,y) = 2x - 3y + 4$

oef. 6

druk	680	700	720	740	760	780
kookpunt	96,9	97,7	98,5	99,3	100,0	100,7

a) kookpunt bij druk van 735

$$f(735) = 98,5 + \frac{99,3 - 98,5}{740 - 720}(735 - 720) = 99,1$$

OF $740 - 720 = 20$ $\Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $99,3 - 98,5 = 0,8$

$735 - 720 = 15$ $98,5 + 0,8 \cdot \frac{3}{4} = 98,5 + 0,6 = 99,1$

b) Druk bij 98°

$$98 = 97,7 + \frac{98,5 - 97,7}{720 - 700}(x - 700)$$

$$98 = 97,7 + 0,04x - 28$$

$$98 - 97,7 + 28 = 0,04x \Rightarrow x = \frac{28,3}{0,04} = 707,5$$

oef. 7

$$\frac{20}{(1+IRR)} + \frac{30}{(1+IRR)^2} + \frac{45}{(1+IRR)^3} = 50$$

Stel $IRR = 0,50 \Rightarrow \frac{20}{1,5} + \frac{30}{(1,5)^2} + \frac{45}{(1,5)^3} = 40$

Stel $IRR = 0,3 \Rightarrow \frac{20}{1,3} + \frac{30}{(1,3)^2} + \frac{45}{(1,3)^3} = 53,6186 \approx 53,62$

$$50 = 40 + \frac{40 - 53,62}{0,5 - 0,3}(x - 0,5)$$

$$50 = 40 + 68,1(x - 0,5) \Rightarrow 10 = -68,1x + 34,05$$

$$x = \frac{-24,05}{-68,1} = 0,3532 \Rightarrow 35,32\%$$

$\Rightarrow$ Lineaire interpolatie is een benadering dus niet exact.
Hoe dichter de 2 punten bij elkaar, hoe accurater.
Als je hier 0,4 pakt ipv 0,3 dan bekom je 34,74%