

Open vragen

1. Vind alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ waarvoor geldt dat

$$\log_2(8x) \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{x^2}\right) = \log_4\left(\frac{x^2}{256}\right).$$

Zet eerst alle logaritmes om naar $\log_2$ met behulp van de formule $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$.
Herschrijf de vergelijking in een kwadratische vergelijking voor $\log_2(x)$.

$$\begin{aligned} \log_2(8x) \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{x^2}\right) &= \log_4\left(\frac{x^2}{256}\right) \\ &\Downarrow \\ \log_2(8x) \frac{\log_2\left(\frac{4}{x^2}\right)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\log_2\left(\frac{x^2}{256}\right)}{\log_2(4)} \\ &\Downarrow \\ -\log_2(8x) \log_2\left(\frac{4}{x^2}\right) &= \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{x^2}{256}\right) \\ &\Downarrow \\ -(\log_2(8) + \log_2(x)) (\log_2(4) - \log_2(x^2)) &= \frac{1}{2} (\log_2(x^2) - \log_2(256)) \\ &\Downarrow \\ -(3 + \log_2(x)) (2 - 2\log_2(x)) &= \frac{1}{2} (2\log_2(x) - 8) \\ &\Downarrow \\ -6 - 2\log_2(x) + 6\log_2(x) + 2(\log_2(x))^2 &= \log_2(x) - 4 \\ &\Downarrow \\ 2(\log_2(x))^2 + 3\log_2(x) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Stel nu $\log_2(x) = y$, dan krijgen we een tweedegraadsvergelijking $2y^2 + 3y - 2 = 0$ die je met de discriminant kan oplossen. Discriminant = $9 + 16 = 25 = 5^2$. Dan is

$$\begin{aligned} y = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} &= \log_2(x) \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \text{OF} \\ y = \frac{-3-5}{4} = -2 &= \log_2(x) \rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De logaritmische vergelijking heeft dus 2 oplossingen: $\sqrt{2}$ en $\frac{1}{4}$.

2. Zij f en g continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Veronderstel dat

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty. \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat er een c in $\mathbb{R}$ bestaat zodat $f(c) = g(c)$.
 (b) Geldt dit resultaat nog steeds als f continu is maar g niet?
 Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
-

- (a) We beschouwen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f - g$.

We tonen dus eigenlijk aan dat er een c in $\mathbb{R}$ bestaat waarvoor $h(c) = 0$ met de tussenwaardestelling. Gezien

- h een continue functie is, want h is de som van 2 continue functies
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f - \lim_{x \rightarrow -\infty} g = -\infty - (+\infty) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = \lim_{x \rightarrow +\infty} f - \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty - (-\infty) = +\infty$

Er bestaan dus een a en b in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $h(a) < 0$ en $h(b) > 0$. Bijgevolg moet er volgens de tussenwaardestelling minstens één nulpunt $c \in \mathbb{R}$ liggen tussen $]a, b[$ waarvoor $h(c) = 0$. Dit betekent dat $h(c) = f(c) - g(c) = 0$ dus dat er een c bestaat waarvoor $f(c) = g(c)$.

- (b) Nee, een tegenvoorbeeld kan zijn:

$$\text{Neem } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \quad \text{en} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{als } x \in \mathbb{R}_0 \\ 1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Als } h = f - g \text{ dan is } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{als } x \in \mathbb{R}_0 \\ -1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Teken zelf deze grafieken eens. Je zal zien dat er geen nulpunt is.

3. Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\frac{1 + e^{-2x}}{8}}.$$

- (a) Bepaal de tweede-ordebenadering rond 0 van de functie f .
 (b) Bereken de fout van deze benadering in $x = 0.3$ met je rekentoestel.
-

(a) De tweede-ordebenadering van f rond het punt a wordt gegeven door:

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

We zoeken de tweede-ordebenadering van deze f rond $a = 0$. We berekenen daarvoor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1 + e^{-2x}}{8}} & f(0) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^{-2x}}{8} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2e^{-2x}}{8} \right) \\ &= \frac{-e^{-2x}}{4} \sqrt{\frac{2}{1 + e^{-2x}}} \quad (\text{optioneel}) & f'(0) &= -\frac{1}{4} \\ f''(x) &= \frac{2e^{-2x}}{4} \sqrt{\frac{2}{1 + e^{-2x}}} - \frac{e^{-2x}}{4} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + e^{-2x}}{2}} (-2(1 + e^{-2x})^{-2})(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{e^{-2x}}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + e^{-2x}}} - \frac{e^{-4x}}{2(1 + e^{-2x})^2} \sqrt{\frac{1 + e^{-2x}}{2}} \quad (\text{optioneel}) & f''(0) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Wanneer we dit invullen in de formule voor $p_2(x)$ vinden we:

$$p_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3}{16}x^2$$

- (b) De fout is $|f(0.3) - p_2(0.3)| \approx 0.001873$.

Meerkeuzevragen

1. Een bakker bedenkt een nieuwe taart. De taart moet een doorsnede van 32 cm hebben en een bepaalde hoogte h_0 . Al zijn taarten zijn cilindervormig en moeten min of meer hetzelfde volume hebben. Dat volume mag maar maximaal 5% afwijken. De bakker weet dat de straal van het grondvlak maximaal 2 mm kan afwijken. Om te weten hoe nauwkeurig de bakker moet omgaan met de hoeveelheid gist die de taart doet rijzen, contacteert hij jou. Bereken de maximale procentuele afwijking van de hoogte. (A) 2.5% (B) 3.75% (C) 1.25% (D) -3.75%

ANTWOORD A. Uitwerking:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V(r_0, h_0)}{V(r_0, h_0)} &\approx \frac{D_1 V(r_0, h_0)}{V(r_0, h_0)} \Delta r + \frac{h_0 \cdot D_2 V(r_0, h_0)}{V(r_0, h_0)} \frac{\Delta h}{h_0} \\ \frac{\Delta V(r_0, h_0)}{V(r_0, h_0)} &\approx \frac{2\pi r_0 h_0}{\pi r_0^2 h_0} \Delta r + \frac{h_0 \cdot \pi r_0^2}{\pi r_0^2 h_0} \frac{\Delta h}{h_0} \\ \frac{\Delta V(r_0, h_0)}{V(r_0, h_0)} &\approx \frac{2}{r_0} \Delta r + 1 \frac{\Delta h}{h_0} \\ 0.05 &\approx \frac{2}{16} \cdot 0.2 + 1 \frac{\Delta h}{h_0} \\ 0.025 &\approx \frac{\Delta h}{h_0}\end{aligned}$$

De procentuele afwijking van de hoogte mag maximaal 2.5 % zijn.

2. Bestaat er een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als voor alle $x \in \mathbb{R}_0$ geldt dat

$$f(x) = \frac{2x - \sin(2x)}{4x^3}?$$

- (A) Ja als $f(0) = \frac{1}{3}$.
(B) Ja als $f(0) = 0$.
(C) Ja als $f(0) = \frac{2}{3}$.
(D) Neen.

Antwoord A. Uitwerking:

We weten: f is continu in 0 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. We berekenen het volgende met de regel van l' Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{4x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{12x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin(2x)}{24x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\cos(2x)}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

De uitgebreide functie zou dan zijn:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{2x - \sin(2x)}{4x^3} & \text{als } x \in \mathbb{R}_0 \\ \frac{1}{3} & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

3. Veronderstel dat $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie is, gedefinieerd op een open interval I dat 1 bevat, die voldoet aan

$$\ln x \cdot f(x) + \frac{1}{f(x)^4} = \frac{1}{16} \text{ voor alle } x \in I.$$

Wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (1,2)?

- (A) 4
- (B) -2
- (C) 16
- (D) -8

Antwoord C. Uitwerking:

De rico van de raaklijn van f in het punt $(1, f(1)) = (1, 2)$ is de afgeleide in dat punt, dus we moeten $f'(1)$ berekenen. Vermits we $f(x)$ niet kunnen afzonderen uit deze vergelijking, kennen we het voorschrift van $f(x)$ dus niet. We kunnen wel beide leden van de vergelijking afleiden.

$$\begin{aligned} \left(\ln x \cdot f(x) + \frac{1}{f(x)^4} \right)' &= \left(\frac{1}{16} \right)' \\ \frac{f(x)}{x} + \ln x \cdot f'(x) - \frac{4f'(x)}{f^5(x)} &= 0 \end{aligned}$$

Voor $x = 1$ wordt dit:

$$2 - \frac{4f'(1)}{2^5} = 0$$

Hieruit halen we dat $f'(1) = 16$.