

Proefexamen Wiskunde voor Economen

Prof. Wim Schoutens

3 november 2021

OPEN VRAGEN (15 punten)

1. (7 punten) Stel dat A, B en C drie punten in $\mathbb{R}^2$ zijn. Dan zegt de driehoeksongelijkheid dat $\|B - A\| \leq \|C - A\| + \|B - C\|$. Dit is een gezien resultaat dat je mag toepassen.

- (a) Bewijs met inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|X_n - X_0\| \leq \|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \|X_3 - X_2\| + \cdots + \|X_{n-1} - X_{n-2}\| + \|X_n - X_{n-1}\|,$$

waarbij $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ staan voor n willekeurige punten in $\mathbb{R}^2$.

BEWIJS:

1. **INDUCTIEBASIS:** We moeten de ongelijkheid aantonen voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. We bewijzen het voor de **kleinste waarde** van deze verzameling, dus van $\mathbb{N}_0$, nl. 1. De waarde $n = 1$ invullen geeft:

$$\|X_1 - X_0\| \leq \|X_1 - X_0\|.$$

Dit is uiteraard waar.

2. **INDUCTIEHYPOTHESE:** We **nemen aan** dat de stelling voor een willekeurige $m \in \mathbb{N}_0$ geldt. Dus:

$$\|X_m - X_0\| \leq \|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \|X_3 - X_2\| + \cdots + \|X_{m-1} - X_{m-2}\| + \|X_m - X_{m-1}\|.$$

3. **INDUCTIESTAP:** We **bewijzen** dat de stelling ook geldt voor $m + 1$. We tonen dus aan dat

$$\|X_{m+1} - X_0\| \leq \|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \|X_3 - X_2\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\| + \|X_{m+1} - X_m\|.$$

We vertrekken vanaf het rechterlid en splitsen op als volgt:

$$(\|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\|) + \|X_{m+1} - X_m\|.$$

In het (blauwe) gedeelte zijn er evenveel termen als in de inductiehypothese. We passen dus de inductiehypothese toe:

$$\|X_m - X_0\| \leq (\|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\|).$$

We tellen nu bij beide leden het stuk $\|X_{m+1} - X_m\|$ op:

$$\begin{aligned} & \|X_m - X_0\| + \|X_{m+1} - X_m\| \\ & \leq (\|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\|) + \|X_{m+1} - X_m\| \end{aligned}$$

Op het linkerlid passen we de driehoeksongelijkheid toe:

$$\|X_{m+1} - X_0\| \leq \|X_m - X_0\| + \|X_{m+1} - X_m\|.$$

Alles samen is dus

$$\begin{aligned} & \|X_{m+1} - X_0\| \\ & \leq \|X_m - X_0\| + \|X_{m+1} - X_m\| \\ & \leq (\|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\|) + \|X_{m+1} - X_m\| \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\|X_{m+1} - X_0\| \leq (\|X_1 - X_0\| + \|X_2 - X_1\| + \cdots + \|X_m - X_{m-1}\|) + \|X_{m+1} - X_m\|.$$

Hiermee is de stelling bewezen voor $m + 1$ en bijgevolg voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Verbetering: (6 punten) Geef jezelf

- 0.5 punt als je opgeschreven hebt dat je de stelling moet aantonen voor $n = 1$.
- 0.5 punt als je bij de inductiebasis uitschrijft en ziet dat het klopt.
- 1 punt voor de inductiehypothese: hier is een verwoording als veronderstel of neem aan noodzakelijk. Maak duidelijk aan je lezer dat dit een hypothese is. -0,5 punt als je de hier stelling niet opnieuw neerschreef.
- 4 punten voor de inductiestap:
 - 0.5 punt om het te bewijzen volledig correct op te schrijven.
 - 0.5 punt om het rechterlid op te delen in de term $\|X_{m+1} - X_m\|$ en het andere (blauwe) stuk.
 - 1 punt om op het (blauwe) stuk de inductiehypothese correct toe te passen (-0.5 als je niet of niet op de correcte plaats “IH” geschreven hebt en ook niet in woorden hebt aangegeven dat je de inductiehypothese gebruikt hebt).
 - 0.5 punt om $\|X_{m+1} - X_m\|$ bij beide leden op te tellen.
 - 1 punt om op het linkerlid de driehoeksongelijkheid toe te passen.
 - 0.5 punt om alles samen te nemen en daaruit te besluiten dat de stelling waar is.

- (b) Zou de stelling van (a) ook gelden met een strikte ongelijkheid? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Nee. We geven dus een tegenvoorbeeld. Stel $n = 1$, $X_0 = (0, 0)$ en $X_1 = (0, 0)$. Dan is zowel het linkerlid als het rechterlid gelijk aan

$$\|X_1 - X_0\| = \|(0, 0) - (0, 0)\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

De ongelijkheid is hier dus niet strikt.

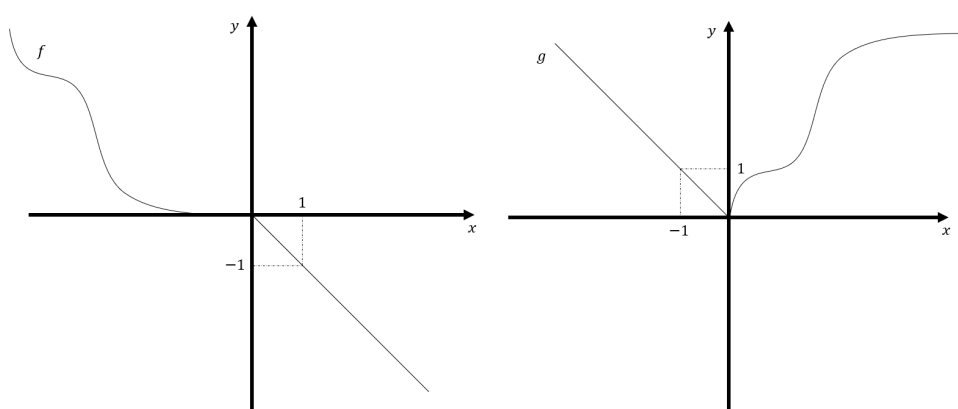
Verbetering: (1 punt) Geef jezelf

- 1 punt voor een volledig correct tegenvoorbeeld. Enkel “ja” of “nee” levert geen punten op.

Als je in woorden uitlegt waarom het niet strikt is, maar geen concreet tegenvoorbeeld had, mag je jezelf 0.5 punt geven.

2. (8 punten)

- (a) Beschouw onderstaande grafieken van f en g . Teken aan de hand hiervan de grafiek van $f \circ g$.



De samenstelling $f \circ g$ houdt in dat we eerst de functie g moeten toepassen en daarna de functie f . Positieve x -waarden beeldt g af op positieve waarden in een gekromde curve. Die positieve waarden steken we in f en worden daardoor tegengesteld. Bijgevolg is $(f \circ g)(x) = -g(x)$ voor $x \geq 0$.

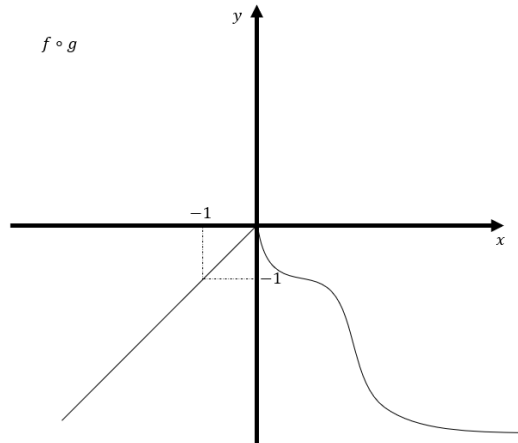
Negatieve x -waarden worden door g tegengesteld. Daardoor krijgen we een positieve waarde om in f te steken. Zo wordt de waarde nog eens tegengesteld. We eindigen dus met hetzelfde met de x -waarde waarmee we begonnen. Alles samen ziet de grafiek er als volgt uit (Figuur 2).

Verbetering: (2 punten) Geef jezelf

- 1 punt als je de grafiek bij positieve x -waarden juist had.
- 1 punt als je de grafiek bij negatieve x -waarden juist had.
- Heb je de assen x en y niet benoemd, of een grafiek zonder ijking? Trek dan 0.25 punt af.

- (b) Is de functie

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (2y + 4, x^2)$$



Figuur 2: De samenstelling $f \circ g$ uit oefening 2a.

injectief? Toon aan!

Ja, deze functie is injectief. We bewijzen

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \implies (x_1, x_2) = (y_1, y_2).$$

Neem daarvoor $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ willekeurig zodat

$$f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2).$$

Dus,

$$(2x_2 + 4, x_1^2) = (2y_2 + 4, y_1^2).$$

Uit de eerste component volgt dat $2x_2 + 4 = 2y_2 + 4$. Bijgevolg is $2x_2 = 2y_2$ en dus $x_2 = y_2$. Uit de tweede component halen we $x_1^2 = y_1^2$. Aangezien x_1 en y_1 beide element zijn van $\mathbb{R}^+$ wegens het domein van de functie, mogen we besluiten dat $x_1 = y_1$. Er geldt dus $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

Verbetering: (2 punten) Geef jezelf

- 1 punt om te komen tot $(2x_2 + 4, x_1^2) = (2y_2 + 4, y_1^2)$
- 1 punt voor de verdere uitwerking met vermelding van het domein $\mathbb{R}^+$ en het besluit dat de functie injectief is.
- Merk op: als je enkel 'ja' antwoordt zonder bewijs, krijg je geen punten.

(c) Is de functie

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x^2 - y| - 100$$

surjectief? Toon aan!

Nee, want $y = -200$ zit in de doelverzameling, maar er bestaat geen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zodat $g(x, y) = -200$. Immers, $|x^2 - y| \geq 0$, dus $g(x, y) \geq -100$.

Verbetering: (1 punt) Geef jezelf

- 0.5 punt voor een concrete waarde uit de doelverzameling zit, maar niet in het beeld.
- 0.5 punt om uit te leggen waarom jouw gekozen waarde niet in het beeld zit.
- Merk op: als je enkel ‘nee’ antwoordt zonder voorbeeld, krijg je geen punten.

(d) De functie

$$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0.90x + 0.20y & \text{als } x \leq 500 \\ \frac{x^2}{500} + 0.20y & \text{als } x > 500 \end{cases}$$

stelt de kost voor gas en elektriciteit voor van een particulier bij een verbruik van x kWh elektriciteit en y kWh gas. Teken alle koppels (x, y) die zorgen voor een totale kostprijs van 750 euro.

Er wordt dus naar de niveaulijn bij $c = 750$ gevraagd. We stellen $K(x, y) = 750$. Ofwel is $x \leq 500$ en dan krijgen we

$$0.90x + 0.20y = 750 \iff 0.20y = 750 - 0.90x \iff y = 3750 - 4.50x.$$

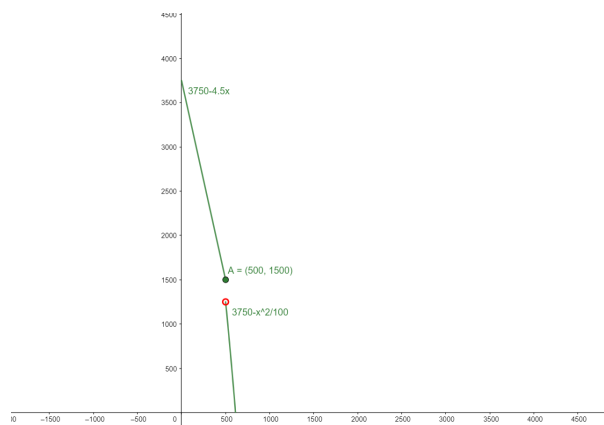
Dit is een rechte (let op: enkel tekenen bij $x \leq 500$).

Anders is $x > 500$. Dan krijgen we

$$\frac{x^2}{500} + 0.20y = 750 \iff 0.20y = 750 - \frac{x^2}{500} \iff y = 3750 - \frac{x^2}{100}.$$

Dit is een bergparabool. Let op: dit stuk kan je enkel tekenen bij $x > 500$. Bovendien mogen we volgens het domein van de functie enkel positieve waarden voor x én y tekenen.

We krijgen alles samen de volgende schets (Figuur 3).



Figuur 3: De niveaulijn bij $c = 750$ uit oefening 2d.

Verbetering: (1 punt) Geef jezelf

- 1 punt om het voorschrift bij $x \leq 500$ uit te rekenen (met vermelding $x \leq 500$).
- 1 punt om het voorschrift bij $x > 500$ uit te rekenen (met vermelding $x > 500$).
- 1 punt om beide correct te tekenen. Let op (-0.5 per fout):
 - Enkel positieve x en y getekend.
 - De parabool lijkt bijna op een rechte. Als je zelf iets meer kromming getekend hebt, is dat geen probleem.
 - De rechte en parabool niet doortrekken, maar enkel op het gepaste interval.
 - Het punt bij $x = 500$ plakt aan de rechte. Zorg dat je dit aanduidt (gesloten en open bolletje, of met kleur).
 - Assen benoemen (-0.25).

MEERKEUZEVRAGEN (5 punten)

Noteer jouw antwoorden **DUIDELIJK IN DE TABEL** op het eerste blad.

Giscorrectie: per juist antwoord: $+1$, per fout antwoord: $-\frac{1}{3}$, blanco: 0. Dit wordt dan verrekend naar 5 punten.

(MK1) Beschouw volgende verzamelingen en duid vervolgens de JUISTE uitspraak aan:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y - 7\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

$$C = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \mid \frac{|x|}{|x-1|} < 1 \right\}$$

- (A) De verzameling A is een verticale rechte.
- (B) De verzameling C bestaat uit alle punten (x, y) , waarbij de x -coördinaat dichterbij 0 dan bij 1.
- (C) Er geldt $\#(A \cap B) \neq 0$.
- (D) De verzameling $A \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$.

Antwoord A is niet juist, want $x = y - 7$ is een schuine rechte ($y = x + 7$). Bij de verzameling C is de voorwaarde dat $|x| < |x - 1|$. Dit linkerlid is de afstand van x tot 0, het rechterlid is de afstand van x tot 1. Dus inderdaad, de afstand van x tot 0 is kleiner en bijgevolg ligt x dichterbij 0 dan bij 1. Antwoordmogelijkheid B is dus juist.

Antwoord C is niet juist, omdat er geen enkel punt in zowel A als B zit. Het aantal elementen in de doorsnede is dus wel 0. Ten slotte is antwoord D ook niet juist, want bijvoorbeeld $(0, 1)$ voldoet aan $x < y$, maar zit niet in de doorsnede (dit punt zit immers niet in de verzameling A).

(MK2) Drie van de vier antwoordmogelijkheden zijn gelijk. Duid de andere aan.

$$(A) \sum_{k=210}^{310} (-1)^{2k+1} \frac{k!}{(k+1)!} x^{k-1}$$

$$(B) \sum_{k=200}^{300} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k+11} x^{k+9}$$

$$(C) \sum_{k=200}^{310} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k+1} x^{k-1} - \sum_{k=200}^{209} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k+1} x^{k-1}$$

$$(D) \sum_{k=200}^{300} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k-9} x^{k-11}$$

Als we de eerste twee sommen vergelijken, dan is er een substitutie $l = k - 10$ gebeurd. De bovengrens was bij de eerste som $k = 310$, dus $l = 310 - 10 = 300$. De ondergrens was $k = 210$ en wordt $l = 210 - 10$. In de sommand mogen we k vervangen door $l + 10$ (immers, als $l = k - 10$, dan is $k = l + 10$). We krijgen dan

$$\sum_{l=200}^{300} (-1)^{2(l+10)+1} \frac{1}{l+10+1} x^{l+10-1}.$$

Merk op dat $(-1)^{2(l+10)+1} = (-1)^{2l+21} = (-1)^{2l+1} \cdot (-1)^{20} = (-1)^{2l+1}$. De eerste som is dus gelijk aan de tweede.

Ook de derde som is gelijk aan de eerste (en dus ook aan de tweede). Merk daarvoor op dat $\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$. Verder is de som opgesplitst: optellen van $k = 210$ tot $k = 310$ komt op hetzelfde neer als optellen vanaf $k = 200$ tot $k = 310$ en er de termen van $k = 200$ tot en met $k = 209$ terug van aftrekken.

Antwoord D is dus de verschillende. Daar werd een substitutie verkeerd uitgevoerd.